Corrigé

Exercice 1

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2018

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SUJET

ÉPREUVE DU MERCREDI 20 JUIN 2018

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 7

L'usage de la calculatrice est autorisé.

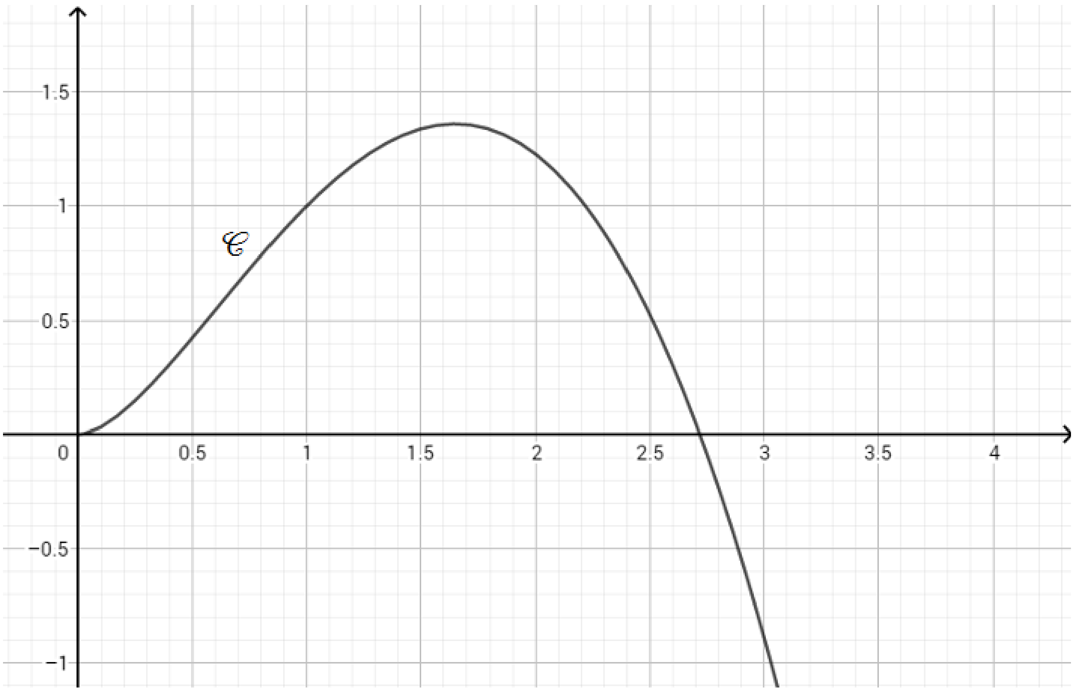
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 9 pages, y compris celle-ci.

Exercice 1 (5 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;3]$ par $f(x)=x^2(1-\ln x)$.
On donne ci-dessous sa courbe représentative $\mathscr{C}$.



On admet que f est deux fois dérivable sur $]0\,;3]$, on note f' sa fonction dérivée et on admet que sa dérivée seconde f'' est définie sur $]0\,;3]$ par : $f''(x)=-1-2\ln x$.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions posées, une seule réponse est exacte. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Une réponse multiple ne rapporte aucun point.

1. Sur $]0\,;3]$, $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse :

(a) e (b) 2,72 (c) $\frac{1}{2}\mathrm{e}+1$

2. $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion d'abscisse :

(a) e (b) $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ (c) $\sqrt{\mathrm{e}}$

3. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;3]$ on a :

(a) $f'(x)=x(1-2\ln x)$ (b) $f'(x)=-\dfrac{2}{x}$ (c) $f'(x)=-2$

4. Sur l'intervalle $[1;3]$:

(a) f est convexe (b) f est décroissante (c) f' est décroissante

5. Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse e s'écrit :

(a) $y=-x+\mathrm{e}$ (b) $y=-\mathrm{e}x$ (c) $y=-\mathrm{e}x+\mathrm{e}^2$

EXERCICE 1

[Polynésie 2018]

1. **La bonne réponse est : a.**

En effet, sur $]0;3]$, la courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses quand : $\boldsymbol{f(x) = 0}$.

$f(x) = 0 \iff x^2(1 - \ln x) = 0$

$\iff 1 - \ln x = 0$, **car : $x \neq 0$ du fait que $x \in]0;3]$**

$\iff \ln x = 1$

$\iff \boldsymbol{x = e}$.

Ainsi, la courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses quand : $\boldsymbol{x = e}$ et $e \in]0;3]$.

2. **La bonne réponse est : b.**

En effet, $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion quand : $\boldsymbol{f''(x) = 0}$.

$f''(x) = 0 \iff -1 - 2\ln x = 0$

$\iff \ln x = -\dfrac{1}{2}$

$\iff x = e^{-\frac{1}{2}}$ cad : $\boldsymbol{x = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}}$.

Ainsi, la courbe $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion quand : $\boldsymbol{x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}}$.

3. **La bonne réponse est : a.**

En effet, ici : $f(x) = x^2(1 - \ln x)$. **$(u \times v)$**

Pour tout $x \in]0;3]$: $f'(x) = (2x) \times (1 - \ln x) + (x^2) \times \left(-\frac{1}{x}\right)$ ($u' \times v + u \times v'$)

$= 2x - 2x \ln x - x$

$= x(1 - 2\ln x)$.

Ainsi, sur $]0;3]$: $f'(x) = x(1 - 2\ln x)$.

4. La bonne réponse est: **c**.

Sur $[1;3]$ la fonction f' est décroissante ssi: pour tout $x \in [1;3]$, $f''(x) \leqslant 0$.

Or: $f''(x) = -1 - 2\ln x \iff f''(x) = -(1 + 2\ln x) \leqslant 0$.

Ainsi, nous pouvons affirmer que sur $[1;3]$: la fonction f' est décroissante.

5. La bonne réponse est: **c**.

En effet, l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $x = e$ s'écrit:

$y = f'(e)(x - e) + f(e)$

$= -e(x - e) + 0$, car: $f'(e) = -e$ et $f(e) = 0$

$= -ex + e^2$.

Ainsi, l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $x = e$ est: $y = -ex + e^2$.