Corrigé

Exercice 4

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES - Série ES

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures **Coefficient : 5**

MATHÉMATIQUES - Série L

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures **Coefficient : 4**

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

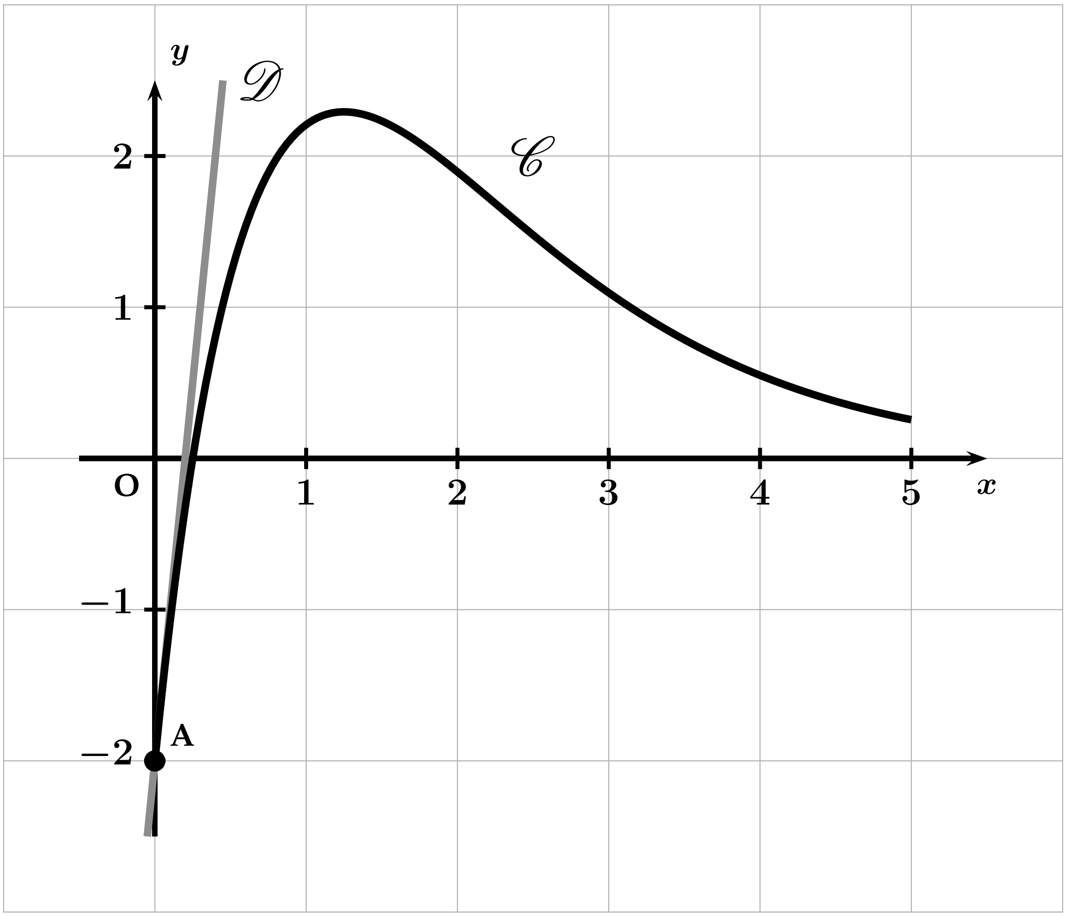
Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

EXERCICE 4 (6 points)

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0\,;5]$ par $f(x) = (ax - 2)\,\mathrm{e}^{-x}$, où a est un nombre réel.

On admet dans tout l'exercice que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $[0\,;5]$.

La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est donnée ci-dessous dans un repère d'origine O.



Les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ passent toutes les deux par le point $\mathrm{A}(0\,;-2)$.

La droite $\mathscr{D}$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A et admet pour équation $y = 10x - 2$.

On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

1. Donner, à l'aide des informations ci-dessus et sans justifier, les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$.

2. **a)** Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;5]$ on a :

$$f'(x) = (-ax + a + 2)\,\mathrm{e}^{-x}$$

b) Déduire des questions précédentes que $a = 8$.

c) Donner l'expression de $f'(x)$ en fonction de x.

3. **a)** Préciser le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;5]$. On pourra faire un tableau.

   b) En déduire le tableau des variations de la fonction f sur ce même intervalle.

   c) Résoudre sur l'intervalle $[0\,;5]$ l'équation $f(x) = 0$.

4. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu les résultats suivants :

1	$g(x) := (-8 * x + 10) * \exp(-x)$ $\rightarrow \boldsymbol{g(x) := (-8x + 10)\,\mathrm{e}^{-x}}$
2	Dériver $[g(x), x]$ $\rightarrow \boldsymbol{(8 * x - 18) * \exp(-x)}$
3	Résoudre $[(8 * x - 18) * \exp(-x) > 0, x]$ $\rightarrow \boldsymbol{x > 9/4}$

   En utilisant ces résultats :

   a) Donner l'expression de f'', fonction dérivée seconde de la fonction f.

   b) Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion dont on donnera la valeur exacte de l'abscisse.

5. Une entreprise fabrique des grille-pains. Après avoir fait une étude, son directeur constate que si l'entreprise fabrique chaque jour x milliers de grille-pains (où x est un nombre réel de l'intervalle $[1\,;5]$), alors le bénéfice quotidien est donné, en centaine de milliers d'euros, par la fonction f définie par :

$$f(x) = (8x - 2)\,\mathrm{e}^{-x}$$

   a) Quelle quantité de grille-pains l'entreprise doit-elle fabriquer afin de réaliser un bénéfice maximal ?

   b) Quel est alors la valeur de ce bénéfice maximal ?
   On donnera une valeur approchée du résultat à l'euro près.

EXERCICE 4

[Polynésie 2017]

1. Donnons les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$:

Nous avons: • $f(0) = -2$ (A $(0 ; -2)$)

• $f'(0) = 10$ ($y = 10x - 2$).

2. a. Déterminons f' pour tout réel de l'intervalle $[0 ; 5]$:

Ici: • $f(x) = (ax - 2)\, e^{-x}$ **($u \times v$)**

• $Df = [0 ; 5]$

• f est deux fois dérivables sur l'intervalle $[0 ; 5]$.

Comme f est deux fois dérivables sur $[0 ; 5]$, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [0 ; 5]$.

Pour tout $x \in [0 ; 5]$: $f'(x) = a \times e^{-x} + (ax - 2) \times (-e^{-x})$ **($u' \times v + u \times v'$)**

$\Rightarrow f'(x) = e^{-x} \times (-ax + a + 2)$.

Au total, pour tout $x \in [0 ; 3]$: $f'(x) = e^{-x} \times (-ax + a + 2)$.

2. b. Déduisons-en que $a = 8$:

Nous savons que: • $f'(0) = 10$

• $f'(x) = e^{-x} \times (-ax + a + 2)$.

D'où: $f'(0) = 10$ et $f'(0) = a + 2$.

En égalisant: $a + 2 = 10 \Rightarrow a = 8$.

Au total, nous avons bien: $a = 8$.

2. c. Donnons l'expression de f' en fonction de x:

Comme $a = 8$: pour tout $x \in [\,0; 5\,]$, $f'(x) = e^{-x} \times (-8x + 10)$.

3. a. Précisons le signe de f' sur l'intervalle $[\,0; 5\,]$:

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $x \in [\,0; 5\,]$:

- **1^er cas**: $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0$ ssi $e^{-x} \times (-8x + 10) = 0$

$\Leftrightarrow -8x + 10 = 0^{*}$, cad: $x = 1{,}25$.

- **2^ème cas**: $f'(x) < 0$.

$f'(x) < 0$ ssi $e^{-x} \times (-8x + 10) < 0$

$\Leftrightarrow -8x + 10 < 0^{*}$, cad: $x > 1{,}25$ ou $x \in]\,1{,}25; 5\,]$.

- **3^ème cas**: $f'(x) > 0$.

$f'(x) > 0$ ssi $e^{-x} \times (-8x + 10) > 0$

$\Leftrightarrow -8x + 10 > 0^{*}$, cad: $x < 1{,}25$ ou $x \in [\,0; 1{,}25\,[$.

(*: car pour tout $x \in [\,0; 5\,]$, $e^{-x} > 0$)

Au total: • f est croissante sur $[\,0; 1{,}25\,]$,

(car sur $[\,0; 1{,}25\,]$, $f'(x) \geq 0$)

• f est décroissante sur $[\ 1,25\ ;\ 5\ ]$.

(car sur $[\ 1,25\ ;\ 5\ ]$, $f'(x) \leqslant 0$)

3. b. Donnons le tableau de variation de f sur $[\ 0\ ;\ 5\ ]$:

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation suivant:

x	0		$1,25$		5
f'		$+$	0	$-$	
f	a	↗	b	↘	c

Avec: • $a = f(0)$ => $a = -2$,

• $b = f(1,25)$ => $b = 8e^{-1,25}$,

• $c = f(5)$ => $c = 38e^{-5}$.

3. c. Résolvons l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[\ 0\ ;\ 5\ ]$:

$f(x) = 0$ <=> $e^{-x} \times (8x - 2) = 0$

<=> $8x - 2 = 0$ (car pour tout $x \in [\ 0\ ;\ 5\ ]$: $e^{-x} > 0$)

=> $x = 4$.

Ainsi, l'équation $f(x) = 0$ admet pour unique solution: $x = 4$.

4. a. Donnons l'expression de f'':

D'après le logiciel: $g'(x) = e^{-x} \times (8x - 18)$.

Ainsi: $f''(x) = e^{-x} \times (8x - 18)$.

4. b. Déterminons la valeur exacte de l'abscisse du point d'inflexion:

> Rappelons qu'en un point d'inflexion, la dérivée seconde s'annule et change de signe.

Or c'est le cas quand: $x = \dfrac{9}{4}$ (logiciel).

Au total, l'abscisse du point d'inflexion est: $x = 2,25$.

5. a. Déterminons la quantité de grille-pains que l'entreprise doit fabriquer pour réaliser un bénéfice maximum:

D'après le tableau de variation que nous avons dressé, nous remarquons que f, cad le bénéfice, est maximum quand: $x = 1,25$.

Dans ces conditions le nombre de grille-pains qui permet à l'entreprise de réaliser un bénéfice maximal est: 1250.

5. b. Déterminons le bénéfice maximal:

Le bénéfice maximal est atteint quand: $x = 1,25$.

Or: $f(1,25) = 8\ e^{-1,25}$.

Dans ces conditions, le bénéfice maximal est: $B_{max} = 8\ e^{-1,25} \times 100\,000$ €.

Au total, le bénéfice maximal réalisé par l'entreprise est:

$$B_{max} \approx 229\,204 \text{ €}.$$