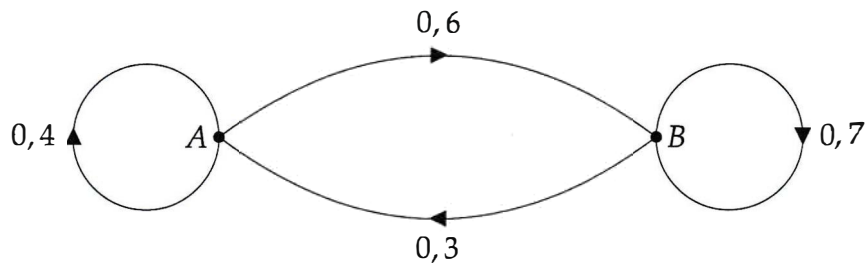


EXERCICE 3 (5 points)

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

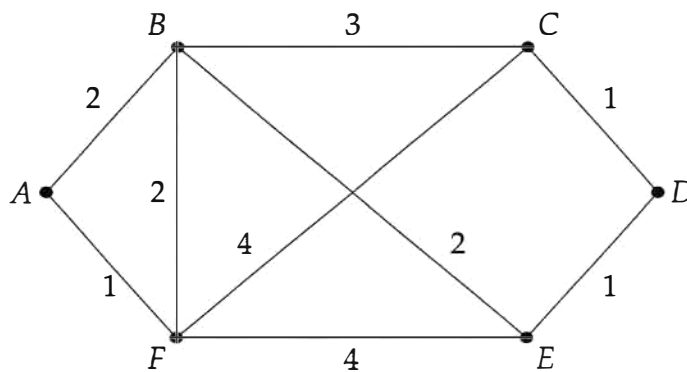
Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. On donne le graphe probabiliste suivant :



Affirmation A : L'état stable associé à ce graphe est $\left(\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3}\right)$.

2. On donne le graphe pondéré G suivant :



Affirmation B : Il existe une chaîne passant une et une seule fois par toutes les arêtes de ce graphe.

Affirmation C : La plus courte chaîne entre les sommets A et D est une chaîne de poids 5.

3. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On suppose que M est la matrice d'adjacence d'un graphe à quatre sommets A, B, C, D dans cet ordre.

Affirmation D : Il existe exactement 3 chaînes de longueur 4 reliant le sommet B au sommet D .

4. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Affirmation E : Il existe un nombre réel a pour lequel B est l'inverse de A .

EXERCICE 3

[Polynésie 2016]

1. Affirmation A: " L'état stable associé à ce graphe est $\left(\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3}\right)$ ".

C'est Faux.

Justification:

D'après le cours, nous savons que l'état stable P est l'unique solution de l'équation $P = P \times M$.

Or ici, la matrice associée au graphe probabiliste ou matrice de transition M est:

$$M = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

Posons: $P = (a \quad b)$.

Dans ces conditions: $P = P \times M$

$$\Leftrightarrow (a \quad b) = (a \quad b) \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (a \quad b) = (0,4 \times a + 0,3 \times b \quad 0,6 \times a + 0,7 \times b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,4 \times a + 0,3 \times b \\ b = 0,6 \times a + 0,7 \times b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,6 \times a - 0,3 \times b = 0 \\ a + b = 1 \text{ ou } b = 1 - a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{2}{3} \end{cases} .$$

Au total: $P = \left(\frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \right)$ correspond à l'état stable de ce graphe.

2. a. Affirmation B: " Il existe une chaîne passant une et une seule fois par toutes les arêtes de ce graphe. "

C'est Vrai.

Justification:

- Ici le graphe est connexe car il existe une chaîne entre deux sommets quelconques de ce graphe.
- De plus, d'après le cours:

- G étant un graphe connexe, les deux propriétés suivantes sont équivalentes:
 - Deux sommets (et deux seulement) X et Y de G sont de degré impair.
 - G admet une chaîne eulérienne d'extrémités X et Y.
- Une chaîne eulérienne est une chaîne qui satisfait:
 - Elle contient toutes les arêtes du graphe.
 - Chaque arête n'est décrite qu'une seule fois.

- Le tableau des sommets degrés est le suivant:

Sommets	A	B	C	D	E	F
Degrés	2	4	3	2	3	4

- Ainsi, il y a 2 sommets C et E de degré impair, et par conséquent:
 - Deux sommets C et E de G sont de degré impair
 - \Leftrightarrow • G admet une chaîne eulérienne d'extrémités C et E
 - \Leftrightarrow • La chaîne contient toutes les arêtes du graphe
 - \Leftrightarrow • Chaque arête n'est décrite qu'une seule fois
 - \Leftrightarrow • Il existe une chaîne passant une et une seule fois par toutes les arêtes de ce graphe.

2. b. Affirmation C: " La plus courte chaîne entre les sommets A et D est de poids 5 ".

C'est Vrai.

Justification:

La chaîne la plus courte entre les sommets A et D est:

A - B - D.

Soit un poids total de: $2 + 2 + 1 = 5$.

3. Affirmation D: " Il existe exactement 3 chaînes de longueur 4 reliant le sommet B au sommet D ".

C'est Faux.

Justification:

A l'aide d'une machine à calculer, nous trouvons:

$$M^4 = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{pmatrix} 7 & 6 & 4 & 6 \\ 6 & 11 & 2 & \textcircled{6} \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Au total, le nombre exact de chaînes de longueur 4 reliant le sommet B au sommet D est: $\textcircled{6}$. (2^e ligne, 4^e colonne)

4. Affirmation E: " Il existe un nombre réel " a " pour lequel B est l'inverse de A ".

C'est Vrai.

Justification:

B est l'inverse de A ssi: $A \times B = B \times A = I_2$.

$$A \times B = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a = 1 \\ a^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -1.$$

Au total: quand $a = -1$, la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est l'inverse de la matrice A.