Corrigé

Exercice 3

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2016

MATHÉMATIQUES - Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

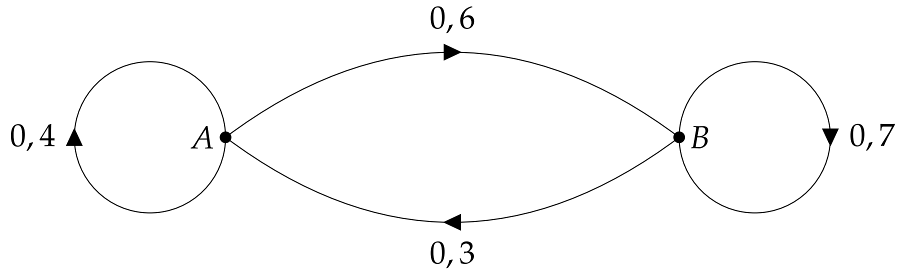
Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 8 pages numérotées de 1/8 à 8/8 .

EXERCICE 3 (5 points)

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

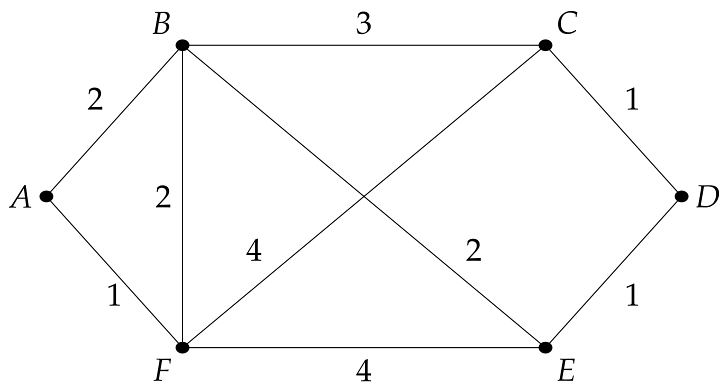
Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. On donne le graphe probabiliste suivant :



Affirmation A : L'état stable associé à ce graphe est $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

2. On donne le graphe pondéré G suivant :



Affirmation B : Il existe une chaîne passant une et une seule fois par toutes les arêtes de ce graphe.

Affirmation C : La plus courte chaîne entre les sommets A et D est une chaîne de poids 5.

3. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On suppose que M est la matrice d'adjacence d'un graphe à quatre sommets A, B, C, D dans cet ordre.

Affirmation D : Il existe exactement 3 chaînes de longueur 4 reliant le sommet B au sommet D.

4. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Affirmation E : Il existe un nombre réel a pour lequel B est l'inverse de A.

EXERCICE 3

[Polynésie 2016]

1. Affirmation A: " L'état stable associé à ce graphe est $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ ".

C'est Faux.

Justification:

D'après le cours, nous savons que l'état stable P est l'unique solution de l'équation $P = P \times M$.

Or ici, la matrice associée au graphe probabiliste ou matrice de transition M est:

$$M = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

Posons: $P = (a \quad b)$.

Dans ces conditions: $P = P \times M$

$$\iff (a \quad b) = (a \quad b) \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$

$$\iff (a \quad b) = (0,4 \times a + 0,3 \times b \quad 0,6 \times a + 0,7 \times b)$$

$$\iff \begin{cases} a = 0,4 \times a + 0,3 \times b \\ b = 0,6 \times a + 0,7 \times b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0,6 \times a - 0,3 \times b = 0 \\ a + b = 1 \text{ ou } b = 1 - a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{2}{3} \end{cases} .$$

Au total: $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ correspond à l'état stable de ce graphe.

2. a. Affirmation B: **" Il existe une chaîne passant une et une seule fois par toutes les arêtes de ce graphe. "**

C'est Vrai.

Justification:

- Ici le graphe est connexe car il existe une chaîne entre deux sommets quelconques de ce graphe.

- De plus, d'après le cours:

> - G étant un graphe connexe, les deux propriétés suivantes sont équivalentes:
>   - Deux sommets (et deux seulement) X et Y de G sont de degré impair.
>   - G admet une chaîne eulérienne d'extrémités X et Y.
> - Une chaîne eulérienne est une chaîne qui satisfait:
>   - Elle contient toutes les arêtes du graphe.
>   - Chaque arête n'est décrite qu'une seule fois.

• Le tableau des sommets degrés est le suivant:

Sommets	A	B	C	D	E	F
Degrés	2	4	3	2	3	4

• Ainsi, il y a 2 sommets C et E de degré impair, et par conséquent:

• Deux sommets C et E de G sont de degré impair

<=> • G admet une chaîne eulérienne d'extrémités C et E

<=> • La chaîne contient toutes les arêtes du graphe

<=> • Chaque arête n'est décrite qu'une seule fois

<=> • Il existe une chaîne passant une et une seule fois par toutes les arêtes de ce graphe.

2. b. Affirmation C: **" La plus courte chaîne entre les sommets A et D est de poids 5 ".**

C'est Vrai.

Justification:

La chaîne la plus courte entre les sommets A et D est:

A - B - D.

Soit un poids total de: $2 + 2 + 1 = 5$.

3. Affirmation D: **" Il existe exactement 3 chaînes de longueur 4 reliant le sommet B au sommet D ".**

C'est Faux.

Justification:

A l'aide d'une machine à calculer, nous trouvons:

$$M^4 = \begin{array}{c|cccc} & A & B & C & D \\ \hline A & \multicolumn{4}{c}{} \\ \end{array}$$

$$M^4 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 7 & 6 & 4 & 6 \\ 6 & 11 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Au total, le nombre exact de chaînes de longueur 4 reliant le sommet B au sommet D est: 6. (2^e ligne, 4^e colonne)

4. **Affirmation E**: **" Il existe un nombre réel " a " pour lequel B est l'inverse de A ".**

C'est Vrai.

Justification:

B est l'inverse de A ssi: $A \times B = B \times A = I_2$.

$$A \times B = I_2 \iff \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -a = 1 \\ a^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -1.$$

Au total: quand $a = -1$, la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est l'inverse de la matrice A.