EXERCICE 3

[Polynésie 2016]

1. Affirmation A: " La fonction f est croissante sur $]0;1[$ ".

L'affirmation A est fausse.

Justifions le.

Pour savoir si f est croissante sur $]0;1[$, nous devons montrer que:

$$\text{pour tout } x \in]0;1[, \quad f'(x) \geqslant 0.$$

Ici: • $f(x) = x\ln x - x + 1$

• $Df =]0;+\infty[$.

Posons: $f = f_1 \times f_2 + f_3$, avec: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \ln x$ et $f_3(x) = -x + 1$.

f_1 et f_3 sont dérivables sur IR comme fonctions polynômes, donc dérivables sur l'intervalle $]0;1[$.

f_3 est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme fonction " ln ", donc dérivable sur $]0;1[$.

Par conséquent, $f_1 \times f_2$ est dérivable sur $]0;1[$ comme produit de 2 fonctions dérivables sur $]0;1[$.

Et, f est dérivable sur $]0;1[$ comme somme $(f_1 \times f_2 + f_3)$ de 2 fonctions dérivables sur $]0;1[$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in]0;1[$.

Pour tout $x \in]0;1[$: $f'(x) = \ln(x) + 1 - 1$

$$\Rightarrow f'(x) = \ln(x).$$

Or sur $]0;1[$, $f'(x) = \ln(x) < 0$.

Au total, la fonction f est: strictement décroissante sur $]0;1[$.

Affirmation B: **" La fonction f est convexe sur $]0;+\infty[$ ".**

L'affirmation B est vraie.

Justifions le.

f est convexe sur $]0;+\infty[$ ssi: pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f''(x) \geq 0$.

Ici, pour tout $x \in]0;+\infty[$: $f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$.

Au total, la fonction f est convexe et est même strictement convexe sur $]0;+\infty[$.

Affirmation C: **" Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f(x) \leq 50$ ".**

L'affirmation C est fausse.

Justifions le.

Pour le montrer, il suffit de prendre un contre-exemple.

Prenons $x = 7000$: $f(7000) = 7000\ln(7000) - 6999$

$$\Rightarrow f(7000) \approx 54976,66 > 50.$$

Au total, l'affirmation C est fausse.

2. **Affirmation D**: " $g'(1) = -2$ ".

L'affirmation D est vraie.

Justifions le.

D'après l'énoncé, g est définie et dérivable sur IR.

La tangente à la courbe (C) au point A(1;2) passe par le point A'(2;0).

Soit " a " le coefficient directeur de cette tangente. " a " est tel que:

$$a = \frac{y_{A'} - y_A}{x_{A'} - x_A} \Rightarrow a = -2.$$

Au total: $g'(1) = a = -2$.

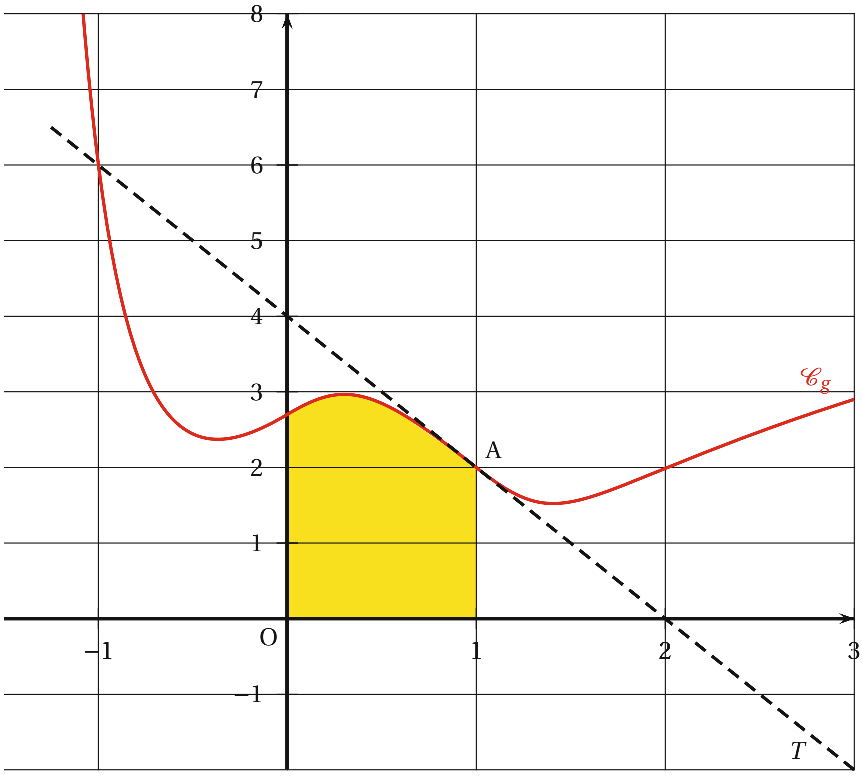
Affirmation E: " $\int_0^1 g(x)dx < 3$ ".

L'affirmation E est vraie.

Justifions le.

En unités d'aire et à l'unité près, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$, est telle que: $\mathcal{A} < 3$ (un peu plus de 2 carreaux, en comptant).

Nous pouvons représenter cette aire $\mathscr{A}$, en jaune, sur le graphique suivant:



Au total: $\int_0^1 g(x)dx \in [2;3[$.