Corrigé

Exercice 3

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2016

MATHÉMATIQUES - Série ES

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures **Coefficient : 5**

MATHÉMATIQUES - Série L

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures **Coefficient : 4**

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7 .

EXERCICE 3 (5 points)

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

On rappelle que **R** désigne l'ensemble des nombres réels.

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\ln x - x + 1$.

Affirmation A : La fonction f est croissante sur l'intervalle $]0\,;1[$.

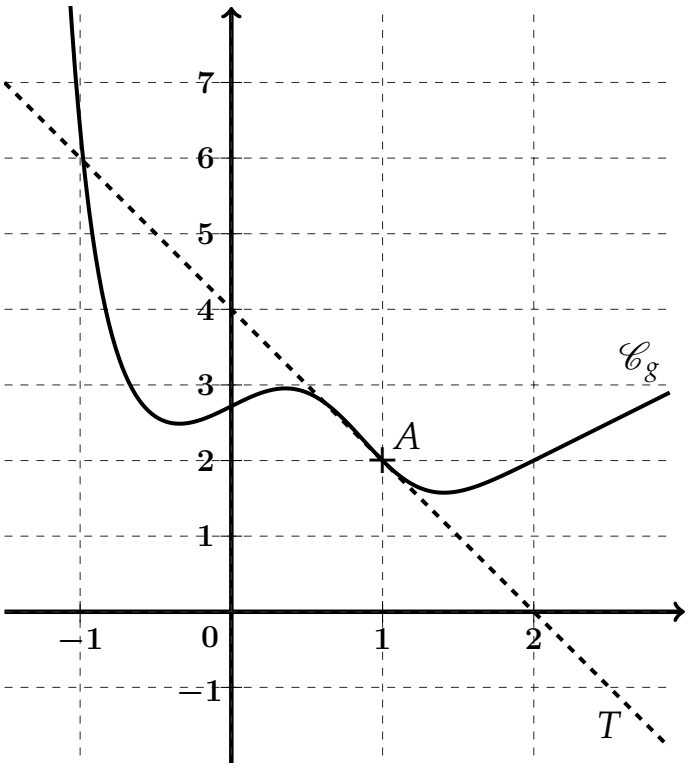
Affirmation B : La fonction f est convexe sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Affirmation C : Pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f(x) \leqslant 50$.

2. On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ d'une fonction g définie sur **R**.

On admet que g est dérivable sur **R** et on rappelle que g' désigne la fonction dérivée de la fonction g.

On a tracé en pointillé la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point A de cette courbe, d'abscisse 1 et d'ordonnée 2. Cette tangente coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 2.



Affirmation D : $g'(1) = -2$.

Affirmation E : $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x < 3$.

EXERCICE 3

[Polynésie 2016]

1. **Affirmation A**: " La fonction f est croissante sur $]0;1[$ ".

L'affirmation A est fausse.

Justifions le.

Pour savoir si f est croissante sur $]0;1[$, nous devons montrer que:

pour tout $x \in]0;1[$, $f'(x) \geqslant 0$.

Ici:
- $f(x) = x \ln x - x + 1$
- $Df =]0;+\infty[$.

Posons: $f = f_1 \times f_2 + f_3$, avec: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \ln x$ et $f_3(x) = -x + 1$.

f_1 et f_3 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme fonctions polynômes, donc dérivables sur l'intervalle $]0;1[$.

f_3 est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme fonction " ln ", donc dérivable sur $]0;1[$.

Par conséquent, $f_1 \times f_2$ est dérivable sur $]0;1[$ comme produit de 2 fonctions dérivables sur $]0;1[$.

Et, f est dérivable sur $]0;1[$ comme somme $(f_1 \times f_2 + f_3)$ de 2 fonctions dérivables sur $]0;1[$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in]0;1[$.

Pour tout $x \in]0;1[$: $f'(x) = \ln(x) + 1 - 1$

$$\Rightarrow f'(x) = \ln(x).$$

Or sur $]0;1[$, $f'(x) = \ln(x) < 0$.

Au total, la fonction f est: strictement décroissante sur $]0;1[$.

Affirmation B: " La fonction f est convexe sur $]0;+\infty[$ ".

L'affirmation B est vraie.

Justifions le.

f est convexe sur $]0;+\infty[$ ssi: pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f''(x) \geqslant 0$.

Ici, pour tout $x \in]0;+\infty[$: $f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$.

Au total, la fonction f est convexe et est même strictement convexe sur $]0;+\infty[$.

Affirmation C: " Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f(x) \leqslant 50$ ".

L'affirmation C est fausse.

Justifions le.

Pour le montrer, il suffit de prendre un contre-exemple.

Prenons $x = 7000$: $f(7000) = 7000\ln(7000) - 6999$

$\Rightarrow f(7000) \approx 54976,66 > 50.$

Au total, l'affirmation C est fausse.

2. Affirmation D: " $g'(1) = -2$ ".

L'affirmation D est vraie.

Justifions le.

D'après l'énoncé, g est définie et dérivable sur IR.

La tangente à la courbe (C) au point A(1;2) passe par le point A'(2;0).

Soit " a " le coefficient directeur de cette tangente. " a " est tel que:

$$a = \frac{y_{A'} - y_A}{x_{A'} - x_A} \Rightarrow a = -2.$$

Au total: $g'(1) = a = -2.$

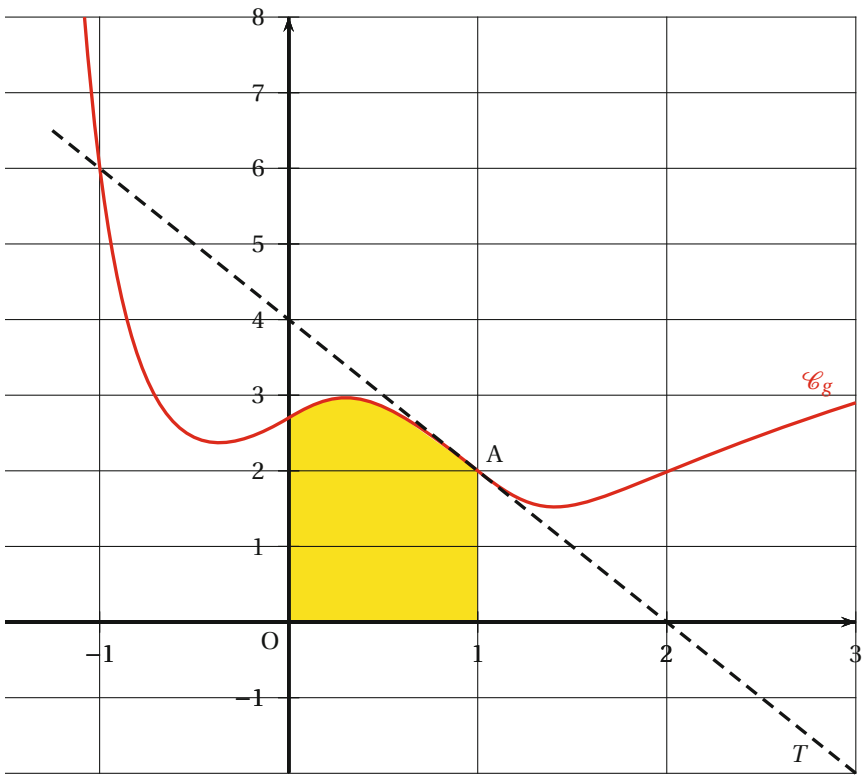
Affirmation E: " $\int_0^1 g(x)dx < 3$ ".

L'affirmation E est vraie.

Justifions le.

En unités d'aire et à l'unité près, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$, est telle que: $\mathcal{A} < 3$ (un peu plus de 2 carreaux, en comptant).

Nous pouvons représenter cette aire $\mathcal{A}$, en jaune, sur le graphique suivant:



Au total: $\int_0^1 g(x)dx \in [2;3[$.