

EXERCICE 2

[Polynésie 2016]

1. a. En supposant que $U_1 = 5000$, déterminons b :

D'après l'énoncé, nous savons que:

- $U_{n+1} = a \times U_n + b$
- $U_0 = 0$
- $U_1 = 5000$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi: } U_1 = 5000 &\Leftrightarrow 5000 = a \times U_0 + b \\ &\Leftrightarrow 5000 = a \times 0 + b \\ &\Rightarrow b = 5000. \end{aligned}$$

$$\text{Au total: } U_{n+1} = a \times U_n + 5000.$$

1. b. Montrons que, pour tout entier naturel n , $a = 1, 2$:

A présent, nous savons que:

- $U_{n+1} = a \times U_n + 5000$
- $U_1 = 5000$
- $U_2 = 11000$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi: } U_2 = a \times U_1 + 5000 &\Leftrightarrow 11000 = a \times 5000 + 5000 \\ &\Rightarrow a = 1, 2. \end{aligned}$$

$$\text{Au total, nous avons bien: } U_{n+1} = 1, 2 \times U_n + 5000.$$

2. a. Calculons U_3 et U_4 :

- Il s'agit de calculer U_3 :

$$U_3 = 1,2 \times U_2 + 5000 \Rightarrow U_3 = 18200 \text{ écrans 3D.}$$

- Il s'agit de calculer U_4 :

$$U_4 = 1,2 \times U_3 + 5000 \Rightarrow U_4 = 26840 \text{ écrans 3D.}$$

2. b. La modélisation semble-t-elle pertinente ?

- En 2013, l'entreprise a vendu 18000 écrans 3D.

Or, pour 2013, le modèle nous donne 18200 écrans 3D.

Donc, à 200 écrans près, oui la modélisation est pertinente.

- En 2014, l'entreprise a vendu 27000 écrans 3D.

Or, pour 2014, le modèle nous donne 26840 écrans 3D.

Donc, à 160 écrans près, oui la modélisation est pertinente.

3. a. Montrons que (V_n) est géométrique et déterminons V_0 et q :

$$V_n = U_n + 25000 \Leftrightarrow V_{n+1} = U_{n+1} + 25000$$

$$\Leftrightarrow V_{n+1} = (1,2 \times U_n + 5000) + 25000 \quad (1).$$

$$\text{Or: } V_0 = U_0 + 25000 \Rightarrow V_0 = 25000 \text{ et } U_n = V_n - 25000.$$

$$\text{Ainsi: } (1) \Leftrightarrow V_{n+1} = (1,2 [V_n - 25000] + 5000) + 25000$$

$$\Leftrightarrow V_{n+1} = 1,2 V_n.$$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 1,2$ et de premier terme $V_0 = 25000$.

3. b. Déduisons-en que pour tout entier naturel n , $U_n = 25\,000 \times 1,2^n - 25\,000$:

- Comme $V_{n+1} = 1,2 V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$V_n = V_0 \times (1,2)^n, \text{ avec: } V_0 = 25\,000.$$

- De plus, nous savons que: * $V_n = 25\,000 \times (1,2)^n$
* $U_n = V_n - 25\,000$.

D'où: $U_n = 25\,000 \times 1,2^n - 25\,000$.

4. a. Résolvons l'inéquation $U_n > 180\,000$:

$$U_n > 180\,000 \Leftrightarrow 25\,000 \times 1,2^n - 25\,000 > 180\,000$$

$$\Leftrightarrow 25\,000 \times 1,2^n > 205\,000$$

$$\Leftrightarrow 1,2^n > \frac{205\,000}{25\,000}^*$$

$$\Leftrightarrow n \ln(1,2) > \ln\left(\frac{205}{25}\right)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{205}{25}\right)}{\ln(1,2)}, \text{ car: } 1,2 > 1, \text{ et donc: } \ln(1,2) > 0$$

$$\Rightarrow n > 11,5407.$$

Nous prendrons $n = 12$ ans car n est un entier naturel.

Au total, il faudra attendre 12 ans, cad 2022, pour que le nombre de ventes d'écrans 3D dépasse 180 000 unités.

Notons que: * $\Leftrightarrow 1,2^n > \frac{205}{25}$

$$\Rightarrow 1,2^n > 8,2, \text{ comme demandé !}$$

4. b. Recopions et complétons l'algorithme:

L'algorithme recopié et complété est le suivant:

Variables:	...		
Initialisation:	N prend la valeur 0 W prend la valeur 1		
Traitement:	Tant que $W \leq 8, 2$ <table border="0" style="margin-left: 40px;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">W prend la valeur $W \times 1, 2$</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">N prend la valeur $N + 1$</td> </tr> </table> Fin du Tant que	W prend la valeur $W \times 1, 2$	N prend la valeur $N + 1$
W prend la valeur $W \times 1, 2$			
N prend la valeur $N + 1$			
Sortie:	Afficher N		

4. c. Déterminons cet entier naturel n:

Comme nous l'avons dit à la question 4. a.: $n = 12$ ans.

5. Déterminons combien d'écrans 3D, l'entreprise peut prévoir de vendre en 2025, compte tenu d'une baisse de 15% par an à partir de 2023:

- En 2022 (2010 + 12 ans), le nombre d'écrans vendus sera de:

$$U_{12} = 25\,000 \times (1, 2)^{12} - 25\,000$$

cad: $U_{12} = 197\,902, 51 \Rightarrow U_{12} \approx 197\,903$ écrans 3D vendus.

- Or à partir de 2023, l'entreprise devra faire face à une baisse de 15% par an.

Donc en 2025, cad 3 années après 2022, le nombre d'écrans vendus sera

$$\text{de: } U_{15} = U_{12} (1 - 15\%)^3$$

$$\text{soit: } U_{15} = 121537,18$$

$$\text{cad: } U_{15} \approx 121538 \text{ écrans 3D vendus.}$$

L'entreprise peut ainsi prévoir de vendre 121538 écrans 3D en 2025.