Corrigé

Exercice 3

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2015

MATHÉMATIQUES

Série ES/L

Durée de l'épreuve : 3 heures **Coefficient : 5 (ES), 4(L)**

ES : ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE
L : ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur

• *Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.*
• *Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.*
• *Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*
• *Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.*

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte **6 pages numérotées de 1 / 6 à 6 / 6**

EXERCICE 3 (6 points) Commun à tous les candidats

Les techniciens d'un aquarium souhaitent régler le distributeur automatique d'un produit visant à améliorer la qualité de l'eau dans un bassin. La concentration recommandée du produit, exprimée en mg.l^{-1} (milligramme par litre), doit être comprise entre 140 mg.l^{-1} et 180 mg.l^{-1}.

Au début du test, la concentration du produit dans ce bassin est de 160 mg.l^{-1}.

On estime que la concentration du produit baisse d'environ 10 % par semaine.

Afin de respecter les recommandations portant sur la concentration du produit, les techniciens envisagent de régler le distributeur automatique de telle sorte qu'il déverse chaque semaine une certaine quantité de produit.
Les techniciens cherchent à déterminer cette quantité de façon à ce que :

- la concentration du produit soit conforme aux recommandations sans intervention de leur part, pendant une durée de 6 semaines au moins ;
- la quantité de produit consommée soit minimale.

Partie A

Dans cette partie, on suppose que la quantité de produit déversée chaque semaine par le distributeur automatique est telle que la concentration augmente de 10 mg.l^{-1}.
On s'intéresse à l'évolution de la concentration chaque semaine. La situation peut être modélisée par une suite (C_n), le terme C_n donnant une estimation de la concentration du produit, en mg.l^{-1}, au début de la $n^{\text{ième}}$ semaine. On a $C_0 = 160$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, $C_{n+1} = 0,9 \times C_n + 10$.

2. Soit la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par : $V_n = C_n - 100$.

   a. Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison $0,9$ et que $V_0 = 60$.

   b. Exprimer V_n en fonction de n.

   c. En déduire que pour tout entier naturel n, $C_n = 0,9^n \times 60 + 100$.

3. **a.** Déterminer la limite de la suite (C_n) quand n tend vers l'infini. Justifier la réponse. Interpréter le résultat au regard de la situation étudiée.

   b. Au bout de combien de semaines la concentration devient-elle inférieure à 140 mg.l^{-1} ?

4. Le réglage envisagé du distributeur répond-il aux attentes ?

Partie B

Dans cette partie, on suppose que la quantité de produit déversée chaque semaine par le distributeur automatique est telle que la concentration augmente de 12 mg.l^{-1}.

Que penser de ce réglage au regard des deux conditions fixées par les techniciens ?

EXERCICE 3

[Polynésie 2015]

Partie A: Réglage du distributeur automatique

1. Justifions que, pour tout entier naturel n, $C_{n+1} = 0,9 \times C_n + 10$:

- D'après l'énoncé: $C_0 = 160$ mg. l^{-1}.

- De plus, chaque semaine la concentration baisse de 10% et augmente de 10 mg. l^{-1}.

Soient:
- C_{n+1}, une estimation de la concentration du produit en mg. l^{-1}, au début de la $(n+1)^{ième}$ semaine,
- C_n, une estimation de la concentration du produit en mg. l^{-1}, au début de la $(n)^{ième}$ semaine.

Pour tout entier naturel n, l'estimation " C_{n+1} " est égale à l'estimation " C_n " diminuée de 10% et augmentée de " 10 mg. l^{-1} ".

Donc pour tout entier naturel n:

$C_{n+1} = C_n - 10\%\ C_n + 10 \iff C_{n+1} = 0,90\ C_n + 10.$

2. a. Montrons que la suite (V_n) est géométrique et déterminons V_0 et q:

$V_n = C_n - 100 \iff V_{n+1} = C_{n+1} - 100$

$\iff V_{n+1} = (0,90\ C_n + 10) - 100 \quad (1).$

Or: $V_0 = C_0 - 100$ => $V_0 = 60$ et $C_n = V_n + 100$.

Ainsi: (1) <=> $V_{n+1} = (0,90\,[V_n + 100] + 10) - 100$

=> $V_{n+1} = 0,90\ V_n$.

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,90$ et de premier terme $V_0 = 60$.

2. b. Exprimons V_n en fonction de n:

Comme $V_{n+1} = 0,90\ V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$V_n = V_0 \times (0,90)^n$, avec: $V_0 = 60$.

2. c. Déduisons-en que pour tout entier naturel n, on a $C_n = (0,90)^n \times 60 + 100$:

Nous savons que: * $V_n = 60 \times (0,90)^n$

* $C_n = V_n + 100$.

D'où: $C_n = 60 \times (0,90)^n + 100$.

3. a. Déterminons la limite de (C_n) en $+\infty$ et interprétons:

$$\lim_{n \to +\infty} C_n = \lim_{n \to +\infty} 60 \times (0,90)^n + 100$$

$= 100$ car: $0,90 \in \,]0, 1[$, et donc: $\lim_{n \to +\infty} (0,90)^n = 0$.

Donc: • La suite (C_n) est convergente et converge vers 100 mg. l^{-1}.

• Au bout de n semaines (" n " très grand), la concentration sera proche de 100 mg. l^{-1}.

Donc problème car la concentration recommandée du produit doit être comprise entre 140 mg. l^{-1} et 180 mg. l^{-1}.

3. b. Au bout de combien de semaines la concentration devient-elle inférieure à 140 mg. l^{-1} ?

Cela revient à résoudre l'inéquation: $C_n \leqslant 140$.

$C_n \leqslant 140 \iff 60 \times (0,90)^n + 100 \leqslant 140$

$\iff 60 \times (0,90)^n \leqslant 40$

$\iff (0,90)^n \leqslant \frac{2}{3}$

$\iff n \ln(0,90) \leqslant \ln\left(\frac{2}{3}\right)$

$\iff n \geqslant \dfrac{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}{\ln(0,90)}$ car: $0,90 \in \,]0, 1[$, et donc: $\ln(0,90) < 0$

$\Rightarrow n \geqslant 3,85$.

Nous prendrons $n = 4$ car n est un entier naturel.

Cela signifie que dès le début de la quatrième semaine, la concentration sera inférieure à 140 mg. l^{-1}.

4. Le réglage est-il conforme aux attentes ?

Non car pour être conforme, la concentration du produit doit être comprise entre 140 mg. l^{-1} et 180 mg. l^{-1} pendant 6 semaines au moins, et ce, sans aucune intervention des techniciens.

Donc le réglage n'est pas bon.

Partie B: Que penser du nouveau réglage ?

Pour répondre à cette question, on refait tous les calculs en prenant:

$$C_{n+1} = 0,90 \times C_n + 12.$$

Après calculs, la condition: " la concentration du produit est conforme aux recommandations sans intervention de la part des techniciens, pendant une durée de 6 semaines au moins " sera remplie.

Donc le nouveau réglage est bon.