EXERCICE 3

[Polynésie 2015]

Partie A: Réglage du distributeur automatique

1. Justifions que, pour tout entier naturel n, $C_{n+1} = 0,9 \times C_n + 10$:

- D'après l'énoncé: $C_0 = 160$ mg. l^{-1}.

- De plus, chaque semaine la concentration baisse de 10% et augmente de 10 mg. l^{-1}.

Soient:
- C_{n+1}, une estimation de la concentration du produit en mg. l^{-1}, au début de la $(n+1)^{\text{ième}}$ semaine,
- C_n, une estimation de la concentration du produit en mg. l^{-1}, au début de la $(n)^{\text{ième}}$ semaine.

Pour tout entier naturel n, l'estimation " C_{n+1} " est égale à l'estimation " C_n " diminuée de 10% et augmentée de " 10 mg. l^{-1} ".

Donc pour tout entier naturel n:

$C_{n+1} = C_n - 10\% \, C_n + 10 \iff C_{n+1} = 0,90 \, C_n + 10.$

2. a. Montrons que la suite (V_n) est géométrique et déterminons V_0 et q:

$V_n = C_n - 100 \iff V_{n+1} = C_{n+1} - 100$

$\iff V_{n+1} = (0,90 \, C_n + 10) - 100 \quad (1).$

Or: $V_0 = C_0 - 100$ => $V_0 = 60$ et $C_n = V_n + 100$.

Ainsi: (1) <=> $V_{n+1} = (0,90\,[V_n + 100] + 10) - 100$

=> $V_{n+1} = 0,90\ V_n$.

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,90$ et de premier terme $V_0 = 60$.

2. b. Exprimons V_n en fonction de n:

Comme $V_{n+1} = 0,90\ V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$V_n = V_0 \times (0,90)^n, \quad \text{avec:} \quad V_0 = 60.$$

2. c. Déduisons-en que pour tout entier naturel n, on a $C_n = (0,90)^n \times 60 + 100$:

Nous savons que: * $V_n = 60 \times (0,90)^n$

* $C_n = V_n + 100$.

D'où: $C_n = 60 \times (0,90)^n + 100$.

3. a. Déterminons la limite de (C_n) en $+\infty$ et interprétons:

$$\lim_{n \to +\infty} C_n = \lim_{n \to +\infty} 60 \times (0,90)^n + 100$$

$= 100$ car: $0,90 \in\,]0, 1[$, et donc: $\lim_{n \to +\infty} (0,90)^n = 0$.

Donc:
- La suite (C_n) est convergente et converge vers 100 mg. l^{-1}.
- Au bout de n semaines (" n " très grand), la concentration sera proche de 100 mg. l^{-1}.

Donc problème car la concentration recommandée du produit doit être comprise entre 140 mg. l^{-1} et 180 mg. l^{-1}.

3. b. **Au bout de combien de semaines la concentration devient-elle inférieure à 140 mg. l^{-1} ?**

Cela revient à résoudre l'inéquation: $C_n \leqslant 140$.

$$C_n \leqslant 140 \iff 60 \times (0,90)^n + 100 \leqslant 140$$

$$\iff 60 \times (0,90)^n \leqslant 40$$

$$\iff (0,90)^n \leqslant \frac{2}{3}$$

$$\iff n \ln(0,90) \leqslant \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\iff n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}{\ln(0,90)} \quad \text{car: } 0,90 \in]0, 1[, \text{ et donc: } \ln(0,90) < 0$$

$$\Rightarrow n \geqslant 3,85.$$

Nous prendrons $n = 4$ car n est un entier naturel.

Cela signifie que dès le début de la quatrième semaine, la concentration sera inférieure à 140 mg. l^{-1}.

4. **Le réglage est-il conforme aux attentes ?**

Non car pour être conforme, la concentration du produit doit être comprise entre 140 mg. l^{-1} et 180 mg. l^{-1} pendant 6 semaines au moins, et ce, sans aucune intervention des techniciens.

Donc le réglage n'est pas bon.

Partie B: Que penser du nouveau réglage ?

Pour répondre à cette question, on refait tous les calculs en prenant:

$$C_{n+1} = 0,90 \times C_n + 12.$$

Après calculs, la condition: " la concentration du produit est conforme aux recommandations sans intervention de la part des techniciens, pendant une durée de 6 semaines au moins " sera remplie.

Donc le nouveau réglage est bon.