Corrigé

Exercice 2

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2018

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SUJET

ÉPREUVE DU MARDI 29 MAI 2018

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 7

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 7 pages, y compris celle-ci.

EXERCICE n°2 (5 points)

Dans un pays deux opérateurs se partagent le marché des télécommunications mobiles. Une étude révèle que chaque année :

- parmi les clients de l'opérateur *EfficaceRéseau*, 70% se réabonnent à ce même opérateur et 30% souscrivent un contrat avec l'opérateur *GenialPhone* ;
- parmi les clients de l'opérateur *GenialPhone*, 55% se réabonnent à ce même opérateur et 45% souscrivent un contrat avec l'opérateur *EfficaceRéseau*.

On note E l'état : « la personne possède un contrat chez l'opérateur *EfficaceRéseau* » et G l'état : « la personne possède un contrat chez l'opérateur *GenialPhone* ».

À partir de 2018, on choisit au hasard un client de l'un des deux opérateurs.

On note également :

- e_n la probabilité que le client possède un contrat avec l'opérateur *EfficaceRéseau* au 1er janvier $(2018 + n)$;
- g_n la probabilité que le client possède un contrat avec l'opérateur *GenialPhone* au 1er janvier $(2018 + n)$;
- $P_n = (e_n \quad g_n)$ désigne la matrice ligne traduisant l'état probabiliste du système au 1er janvier $(2018 + n)$.

Au 1er janvier 2018, on suppose que 10% des clients possèdent un contrat chez *EfficaceRéseau*, ainsi $P_0 = (0{,}1 \quad 0{,}9)$.

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets E et G.

2.

a. Déterminer la matrice de transition M associée au graphe en rangeant les sommets dans l'ordre alphabétique.

b. Vérifier qu'au 1er janvier 2020, environ 57% des clients ont un contrat avec l'opérateur *EfficaceRéseau*.

3.

a. On rappelle que pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = P_n \times M$.

Exprimer e_{n+1} en fonction de e_n et g_n.

b. En déduire que pour tout entier naturel n, $e_{n+1} = 0{,}25e_n + 0{,}45$.

4.

a. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous de façon à ce qu'il affiche l'état probabiliste au 1er janvier $(2018 + n)$:

```
E ← 0,1
G ← 0,9
Pour I allant de 1 à N
        E ← … × E + …
        G ← …
Fin Pour
Afficher E et G
```

b. Déterminer l'affichage de cet algorithme pour $N = 3$. Arrondir au centième.

c. Déterminer l'état stable du système et interpréter votre réponse dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 2

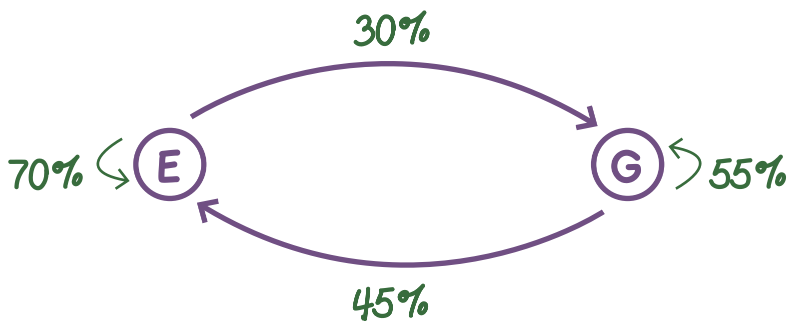
[Liban 2018]

1. Représentons cette situation par un graphe probabiliste de sommets E et G:

Soient: • E, l'état: " EfficaceRéseau ",

• G, l'état: " GenialPhone ".

Le graphe probabiliste est le suivant:



2. a. Donnons la matrice de transition M:

La matrice associée à ce graphe probabiliste ou matrice de transition M est:

$$M = \begin{pmatrix} 70\% & 30\% \\ 45\% & 55\% \end{pmatrix}.$$

2. b. Vérifions qu'au 1er janvier 2020, environ 57% des clients ont un contrat avec EfficaceRéseau:

Il s'agit ici de calculer e_2.

Pour cela nous devons calculer: $P_2 = (e_2 \quad g_2)$.

D'après le cours: $P_2 = P_0 \times M^{(2-0)}$ **cad** $P_2 = P_0 \times M^2$.

Or: $P_0 = (0,1 \quad 0,9)$, **d'après l'énoncé**.

D'où: $P_2 = (0,1 \quad 0,9) \begin{pmatrix} 70\% & 30\% \\ 45\% & 55\% \end{pmatrix}^2$

$= (0,56875 \quad 0,43125)$.

Donc: $e_2 \approx 57\%$ et $g_2 \approx 43\%$.

Au total, au 1^er^ janvier 2020, la proportion de clients chez EfficaceRéseau sera effectivement d'environ: 57%.

3. a. Exprimons e_{n+1} en fonction de e_n et g_n:

D'après le cours, nous savons que, pour tout entier naturel n, P_{n+1} en fonction de P_n s'écrit: $P_{n+1} = P_n \times M$.

$P_{n+1} = P_n \times M \iff (e_{n+1} \quad g_{n+1}) = (e_n \quad g_n) \begin{pmatrix} 70\% & 30\% \\ 45\% & 55\% \end{pmatrix}$

$\iff (e_{n+1} \quad g_{n+1}) = (0,7e_n + 0,45\,g_n \quad 0,3e_n + 0,55\,g_n)$

$\iff e_{n+1} = 0,7e_n + 0,45\,g_n$ **et** $g_{n+1} = 0,3e_n + 0,55\,g_n$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons: $e_{n+1} = 0,7e_n + 0,45\,g_n$.

3. b. Déduisons-en que pour tout entier naturel n, $e_{n+1} = 0,25\,e_n + 0,45$:

Nous avons: $e_n + g_n = 1$ **ce qui revient à dire que** $g_n = 1 - e_n$.

D'où: $e_{n+1} = 0,7e_n + 0,45\,g_n \iff e_{n+1} = 0,7e_n + 0,45\,(1 - e_n)$

$\iff e_{n+1} = 0,25e_n + 0,45.$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons bien: $e_{n+1} = 0,25e_n + 0,45.$

4. a. Recopions et complétons l'algorithme:

L'algorithme recopié et complété est le suivant:

```
E ← 0,1
G ← 0,9

Pour I allant de 1 à N

    | E ← 0,25 x E + 0,45
    |
    | G ← 1 - E

Fin Pour

Afficher  E et G
```

4. b. Déterminons l'affichage de cet algorithme pour $N = 3$:

L'affichage de cet algorithme pour $N = 3$ est: $E \approx 0,59$ et $G \approx 0,41$.

4. c. Déterminons l'état stable du système et interprétons:

A long terme, l'état P_n à l'étape n converge vers P un état stable indépendant de l'état initial P_0.

Nous allons donc déterminer $P = (e \quad g)$.

D'après le cours, nous savons que l'état stable P est l'unique solution de l'équation: $P = P \times M$.

Soit $P = (e \quad g)$, $P = P \times M \iff (e \quad g) = (e \quad g)\begin{pmatrix} 70\% & 30\% \\ 45\% & 55\% \end{pmatrix}$

$$\iff (e \quad g) = (0,7e + 0,45g \quad 0,3e + 0,55g)$$

$$\iff \begin{cases} 0,7e + 0,45g = e \\ 0,3e + 0,55g = g \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0,3e - 0,45g = 0 \\ e + g = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} e = 0,6 \\ g = 0,4 \end{cases}$$, et donc: $P = (0,6 \quad 0,4)$.

Au total, l'état stable du système est: $\mathbf{P = (0,6 \quad 0,4)}$.

Cela signifie qu'après n années (" n très grand "), la part de marché de EfficaceRéseau sera stable autour de **60%**.

Quant à celle de GenialPhone, elle sera stable autour de **40%**.