Corrigé

Exercice 3

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2017

MATHÉMATIQUES

- Série ES -

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 7 pages numérotées de 1 à 7.

EXERCICE 3 (5 points)

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Deux opérateurs Alpha et Bravo se partagent le marché de la téléphonie mobile dans un pays.
En 2015, l'opérateur Alpha possède 30 % du marché de téléphonie mobile. Le reste appartient à l'opérateur Bravo.
On étudie l'évolution dans le temps du choix des abonnés de 2015 pour l'un ou l'autre des opérateurs. Chaque abonné conserve un abonnement téléphonique, soit chez l'opérateur Alpha soit chez l'opérateur Bravo.
On estime que, chaque année :

- 12 % des abonnés de l'opérateur Alpha le quittent et souscrivent un abonnement chez l'opérateur Bravo.
- 86 % des abonnés de l'opérateur Bravo lui restent fidèles, les autres le quittent pour l'opérateur Alpha.

On modélise cette situation par un graphe probabiliste à deux sommets Alpha et Bravo :

- A est l'événement : « l'abonné est chez l'opérateur Alpha » ;
- B est l'événement : « l'abonné est chez l'opérateur Bravo ».

1) Dessiner ce graphe probabiliste.

On admet que la matrice de transition de ce graphe probabiliste, en considérant les sommets dans l'ordre alphabétique, est : $M = \begin{pmatrix} 0{,}88 & 0{,}12 \\ 0{,}14 & 0{,}86 \end{pmatrix}$.

On note pour tout entier naturel n :

- a_n la probabilité qu'un abonné soit chez l'opérateur Alpha l'année $2015 + n$;
- b_n la probabilité qu'un abonné soit chez l'opérateur Bravo l'année $2015 + n$.

On note $P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice ligne de l'état probabiliste pour l'année $2015 + n$.

2) Donner a_0 et b_0 .

3) Montrer qu'en 2018, il y aura environ 44,2 % des abonnés chez l'opérateur Alpha.

4) Les deux opérateurs voudraient connaître la répartition de l'ensemble des abonnés sur le long terme. On note $P = (x \quad y)$ l'état stable de la répartition des abonnés.

a) Montrer que les nombres x et y sont solutions du système $\begin{cases} 0{,}12x - 0{,}14y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$.

b) Résoudre le système précédent dans l'ensemble des réels.

c) Déterminer la répartition des abonnés entre les deux opérateurs au bout d'un grand nombre d'années. Arrondir les pourcentages à 0,1 %.

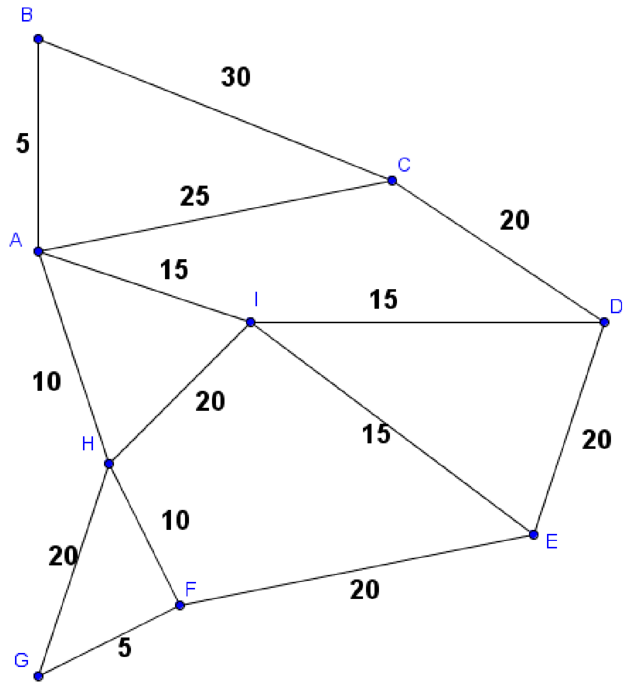
Partie B

Un opérateur français doit développer son réseau de fibre optique dans la région des stations de ski notées A, B, C, D, E, F, G, H, I à l'approche de la saison touristique. À ce jour, seule la station C est reliée au réseau national de fibre optique.

Le coût des tronçons du réseau de fibre optique varie selon le relief des montagnes et des vallées. L'opérateur a mené une étude afin de déterminer son plan de déploiement.

Dans le graphe ci-dessous :

- les sommets représentent les stations de ski ;
- les arêtes représentent les différents tronçons qu'il est possible de déployer ;
- le poids de chaque arête correspond au coût associé, en milliers d'euros.



1) À l'aide de l'algorithme de Dijkstra, déterminer le tracé de fibre optique le moins cher à déployer, entre les stations C et G.

2) Déterminer, en milliers d'euros, le coût de ce tracé.

EXERCICE 3

[Liban 2017]

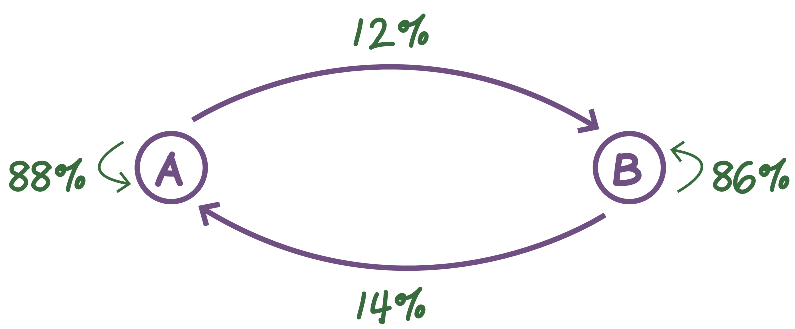
Partie A:

1. Dessinons le graphe probabiliste:

Soient: • A, l'état: " l'abonné est chez Alpha ",

• B, l'état: " l'abonné est chez Bravo ".

Le graphe probabiliste G est le suivant:



2. Déterminons $P_0 = (a_0 \quad b_0)$:

D'après l'énoncé: " En 2015, Alpha possède 30% du marché de téléphonie mobile ".

D'où: $a_0 = 30\%$ et $b_0 = 1 - a_0 = 70\%$.

Au total: $P_0 = (30\% \quad 70\%)$.

Ainsi en 2015: • Alpha a 30% de part de marché,

• Bravo a 70% de part de marché.

3. Montrons qu'en 2018, il y aura environ 44, 2% des abonnés chez l'opérateur Alpha:

2018 = 2015 + " 3 ".

Donc cela revient à déterminer " x ", avec x tel que: $P_3 = (x \quad y)$.

D'après le cours, pour tout entier naturel n: $P_3 = P_0 \times M^{(3-0)}$

$\iff P_3 = P_0 \times M^3$.

Or: $M = \begin{pmatrix} 0,88 & 0,12 \\ 0,14 & 0,86 \end{pmatrix}$ et $P_0 = (30\% \quad 70\%)$.

D'où: $P_3 = (30\% \quad 70\%) \begin{pmatrix} 0,88 & 0,12 \\ 0,14 & 0,86 \end{pmatrix}^3 \Rightarrow P_3 \approx (0,442 \quad 0,558)$, à l'aide d'une calculatrice.

Ainsi: environ $x = 44,2\%$ des abonnées seront chez l'opérateur de téléphonie Alpha en 2018.

4. a. Montrons que les nombres x et y vérifient bien le système:

D'après le cours, nous savons que l'état stable $P = (x \quad y)$ est l'unique solution de l'équation: $P = P \times M$.

$$P = P \times M \iff (x \quad y) = (x \quad y) \begin{pmatrix} 0,88 & 0,12 \\ 0,14 & 0,86 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0,88x + 0,14y \\ y = 0,12x + 0,86y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0,12x - 0,14y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Au total, le système est bien vérifié.

4. b. Résolvons le système:

$$\begin{cases} 0,12x - 0,14y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \approx 53,84\% \\ y \approx 46,16\% \end{cases}, \text{ et donc: } P = (53,84\% \quad 46,16\%).$$

Ainsi: $x \approx 53,84\%$ et $y \approx 46,16\%$.

4. c. Déterminons la répartition des abonnés à long terme:

L'état stable P nous indique, au bout de n années (" n très grand "), le pourcentage des abonnés qui seront chez Alpha, ainsi que celui des abonnés qui seront chez Bravo.

Comme ici: $P = (53,84\% \quad 46,16\%)$, nous pouvons affirmer qu'à long terme 53,84% des abonnés seront chez Alpha et 46,16% seront chez Bravo.

Partie B:

1. A l'aide de l'algorithme de Dijkstra, déterminons le tracé de la fibre optique le moins cher à déployer, entre les stations C et G:

Après recours à l'algorithme de **Dijkstra**, nous trouvons comme tracé de la fibre optique le moins cher pour aller de C à G: le trajet C - A - H - F - G.

2. Déterminons, en milliers d'euros, le coût de ce tracé:

Ce tracé coûtera: $25 + 10 + 10 + 5 = 50\,000$ €.

Au total, le tracé de la fibre optique le moins cher pour aller de C à G est:

C - A - H - F - G, et il coûtera 50 000 €.