

EXERCICE 3 (5 points)

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

L'entreprise PiscinePlus, implantée dans le sud de la France, propose des contrats annuels d'entretien aux propriétaires de piscines privées.

C'est la seule entreprise dans les environs. Aussi, les propriétaires de piscines n'ont que deux choix possibles : soit ils s'occupent eux-mêmes de l'entretien de leur piscine, soit ils souscrivent un contrat avec l'entreprise PiscinePlus.

On admet que le nombre de propriétaires de piscines est constant.

Le patron de cette entreprise remarque que chaque année :

- 12 % des particuliers qui entretenaient eux-mêmes leur piscine décident de souscrire un contrat avec l'entreprise PiscinePlus ;
- 20 % de particuliers sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus décident de le résilier pour entretenir eux-mêmes leur piscine.

Cette situation peut être modélisée par un graphe probabiliste de sommets C et L où :

- C est l'événement « Le particulier est sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus » ;
- L est l'événement « Le particulier effectue lui-même l'entretien de sa piscine ».

Chaque année, on choisit au hasard un particulier possédant une piscine et on note pour tout entier naturel n :

- c_n la probabilité que ce particulier soit sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus l'année $2015 + n$;
- l_n la probabilité que ce particulier entretienne lui-même sa piscine l'année $2015 + n$.

On note $P_n = (c_n \ l_n)$ la matrice ligne de l'état probabiliste pour l'année $2015 + n$.

Dans cet exercice, on se propose de savoir si l'entreprise PiscinePlus atteindra l'objectif d'avoir au moins 35 % des propriétaires de piscines comme clients sous contrat d'entretien.

Partie A

1) Dessiner le graphe probabiliste représentant cette situation et donner la matrice de transition associée au graphe dont les sommets sont pris dans l'ordre C et L.

2) a) Montrer que l'état stable de ce graphe est $P = (0,375 \ 0,625)$.

b) Déterminer, en justifiant, si l'entreprise PiscinePlus peut espérer atteindre son objectif.

Partie B

En 2015, on sait que 15 % des propriétaires de piscines étaient sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus. On a ainsi $P_0 = (0,15 \ 0,85)$.

1) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $c_{n+1} = 0,68 c_n + 0,12$.

2) À l'aide d'un algorithme, on cherche à connaître au bout de combien d'années l'entreprise PiscinePlus atteindra son objectif :

L1	Variables :	n est un nombre entier naturel
L2		C est un nombre réel
L3	Traitement :	Affecter à n la valeur 0
L4		Affecter à C la valeur 0,15
L5		Tant que $C < 0,35$ faire
L6		n prend la valeur $n + 1$
L7		C prend la valeur $0,68 C + 0,12$
L8		Fin Tant que
L9	Sortie :	Afficher n

a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous, en ajoutant autant de colonnes que nécessaire pour permettre la réalisation de l'algorithme ci-dessus. On arrondira les résultats au millième.

Valeur de n	0		
Valeur de C	0,15		

b) Donner la valeur affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

3) On rappelle que, pour tout entier naturel n , on a $c_{n+1} = 0,68 c_n + 0,12$ et que $c_0 = 0,15$. On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = c_n - 0,375$.

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. En préciser la raison et le premier terme.

On admet que, pour tout entier naturel n , on a $c_n = -0,225 \times 0,68^n + 0,375$.

b) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $c_n \geq 0,35$.

c) Quel résultat de la question 2) retrouve-t-on ?

EXERCICE 3

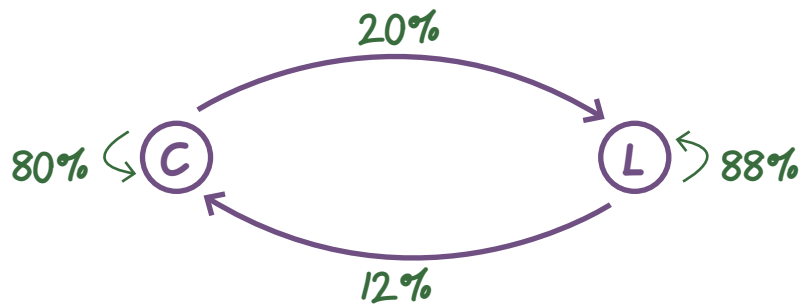
[Liban 2016]

Partie A:

1. Traduisons les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets C et L:

- Soient:
- C, l'état: " Le particulier est sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus ",
 - L, l'état: " Le particulier effectue lui-même l'entretien de sa piscine ".

Le graphe probabiliste G est le suivant:



2. a. Montrons que l'état stable de ce graphe est $P = (0,375 \quad 0,625)$:

D'après le cours, nous savons que l'état stable P est l'unique solution de l'équation $P = P \times M$.

La matrice associée au graphe probabiliste ou matrice de transition M est:

$$M = \begin{pmatrix} 80\% & 20\% \\ 12\% & 88\% \end{pmatrix}.$$

Posons: $P = (a \ b)$.

Dans ces conditions: $P = P \times M$

$$\Leftrightarrow (a \ b) = (a \ b) \begin{pmatrix} 80\% & 20\% \\ 12\% & 88\% \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (a \ b) = (0,8 \times a + 0,12 \times b \quad 0,2 \times a + 0,88 \times b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,8 \times a + 0,12 \times b \\ b = 0,2 \times a + 0,88 \times b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,2 \times a - 0,12 \times b = 0 \\ 0,2 \times a - 0,12 \times b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,6 \times b \\ a + b = 1 \text{ ou } b = 1 - a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0,375 \\ b = 1 - a = 0,625 \end{cases}$$

Au total: $P = (0,375 \quad 0,625)$ correspond à l'état stable de ce graphe.

2. b. Déterminons, en justifiant, si l'entreprise PiscinePlus peut espérer atteindre son objectif:

Rappelons que l'entreprise PiscinePlus atteindra son objectif ssi: " au moins 35% des propriétaires de piscines souscrivent un contrat d'entretien ".

De plus, l'état de P_n à l'étape n converge vers P un état stable indépendant de l'état initial P_0 .

Or l'état stable nous indique qu'au bout de n années (" n très grand "), la probabilité qu'un particulier soit sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus est de: **37,5%**.

Comme $37,5\% > 35\%$: oui l'entreprise PiscinePlus peut espérer atteindre son objectif.

Partie B:

1. Montrons que, pour tout entier naturel n , $c_{n+1} = 0,68c_n + 0,12$:

D'après le cours, nous savons que pour tout n de \mathbb{N} : $P_{n+1} = P_n \times M$.

$$\text{D'où: } (a_{n+1} \quad b_{n+1}) = (a_n \quad b_n) \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,12 & 0,88 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (a_{n+1} \quad b_{n+1}) = (0,8a_n + 0,12b_n \quad 0,2a_n + 0,88b_n)$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = 0,8a_n + 0,12b_n. \quad (a)$$

Or, d'après le cours: $a_n + b_n = 1$, pour tout entier naturel n .

Dans ces conditions: $(a) \Leftrightarrow a_{n+1} = 0,8a_n + 0,12(1 - a_n)$, car $b_n = 1 - a_n$

$$\Rightarrow a_{n+1} = 0,68a_n + 0,12.$$

Au total, pour tout entier naturel n , nous avons: $a_{n+1} = 0,68a_n + 0,12$.

$$(\text{ou: } c_{n+1} = 0,68c_n + 0,12)$$

2. a. Recopions et complétons le tableau:

Le tableau complété est le suivant:

Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6
Valeur de C	0,15	0,222	0,271	0,304	0,327	0,342	0,353

2. b. Donnons la valeur affichée à la fin de l'exécution:

La valeur affichée à la fin de l'exécution est: $n = 6$. Cela signifie que l'objectif sera atteint par l'entreprise, 6 ans après 2015 soit en 2021.

3. a. Montrons que la suite (V_n) est géométrique et déterminons V_0 et q :

$$\begin{aligned} V_n = c_n - 0,375 &\Leftrightarrow V_{n+1} = c_{n+1} - 0,375 \\ &\Leftrightarrow V_{n+1} = (0,68c_n + 0,12) - 0,375 \quad (1). \end{aligned}$$

$$\text{Or: } V_0 = c_0 - 0,375 \Rightarrow V_0 = -0,225 \text{ et } c_n = V_n + 0,375.$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi: } (1) &\Leftrightarrow V_{n+1} = (0,68[V_n + 0,375] + 0,12) - 0,375 \\ &\Rightarrow V_{n+1} = 0,68V_n. \end{aligned}$$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,68$ et de premier terme $V_0 = -0,225$.

3. b. Résolvons l'inéquation $c_n \geq 0,35$:

$$\begin{aligned} c_n \geq 0,35 &\Leftrightarrow -0,225 \times 0,68^n + 0,375 \geq 0,35 \\ &\Leftrightarrow -0,225 \times 0,68^n \geq -0,025 \\ &\Leftrightarrow 0,225 \times 0,68^n \leq 0,025 \\ &\Leftrightarrow 0,68^n \leq \frac{1}{9} \\ &\Leftrightarrow n \ln(0,68) \leq \ln\left(\frac{1}{9}\right) \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{1}{9}\right)}{\ln(0,68)}, \text{ car: } 0,68 \in]0, 1[, \text{ et donc: } \ln(0,68) < 0 \\ &\Rightarrow n \geq 5,697 \end{aligned}$$

$\Rightarrow n \geq 6$, car n est un entier naturel.

Au total, c'est à partir de " 2015 + 6 ", cad 2021, que l'entreprise PiscinePlus atteindra ses objectifs.

3. c. Quel résultat de la question 2. retrouve-t-on ?

Nous retrouvons le même résultat que celui de la question **2.**, à savoir que l'entreprise PiscinePlus atteindra ses objectifs à partir de 2021.