Corrigé

Exercice 2

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2016

MATHÉMATIQUES

- Série ES -

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1 à 6.

EXERCICE 2 (5 points)

Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Un centre de loisirs destiné aux jeunes de 11 ans à 18 ans compte 60 % de collégiens et 40 % de lycéens.
Le directeur a effectué une étude statistique sur la possession de téléphones portables. Cette étude a montré que 80 % des jeunes possèdent un téléphone portable et que, parmi les collégiens, 70 % en possèdent un.
On choisit au hasard un jeune du centre de loisirs et on s'intéresse aux événements suivants :

- C : « le jeune choisi est un collégien » ;
- L : « le jeune choisi est un lycéen » ;
- T : « le jeune choisi possède un téléphone portable ».

Rappel des notations
Si A et B sont deux événements, $p(A)$ désigne la probabilité que l'événement A se réalise et $p_B(A)$ désigne la probabilité de A sachant que l'événement B est réalisé. On note aussi $\bar{A}$ l'événement contraire de A.

1) Donner les probabilités : $p(C)$, $p(L)$, $p(T)$, $p_C(T)$.

2) Faire un arbre de probabilités représentant la situation et commencer à le renseigner avec les données de l'énoncé.

3) Calculer la probabilité que le jeune choisi soit un collégien possédant un téléphone portable.

4) Calculer la probabilité que le jeune choisi soit un collégien sachant qu'il possède un téléphone portable.

5) a) Calculer $p(T \cap L)$, en déduire $p_L(T)$.
b) Compléter l'arbre construit dans la question **2)**.

Partie B

En 2012 en France, selon une étude publiée par l'Arcep (Autorité de régulation des communications électroniques et des postes), les adolescents envoyaient en moyenne 83 SMS (messages textes) par jour, soit environ 2500 par mois. On admet qu'en France le nombre de SMS envoyés par un adolescent en un mois peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 2\,500$ et d'écart-type $\sigma = 650$.

Dans les questions suivantes, les calculs seront effectués à la calculatrice et les probabilités arrondies au millième.

1) Calculer la probabilité qu'un adolescent envoie entre 2 000 et 3 000 SMS par mois.

2) Calculer $p(X \geq 4\,000)$.

3) Sachant que $p(X \leq a) = 0{,}8$, déterminer la valeur de a. On arrondira le résultat à l'unité.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

EXERCICE 2

[Liban 2016]

Partie A: Un centre de loisirs

1. Donnons les probabilités $P(C)$, $P(L)$, $P(T)$ et $P_C(T)$:

D'après l'énoncé, nous avons:

- C = " le jeune est un collégien ".
- L = " le jeune est un lycéen ".
- T = " le jeune possède un téléphone mobile ".

- $P(C) = 60\%$
- $P(L) = 40\%$

$(60\% + 40\% = 1)$.

- $P(T) = 80\%$
- $P(\overline{T}) = 20\%$

$(80\% + 20\% = 1)$.

- $P_C(T) = 70\%$
- $P_C(\overline{T}) = 30\%$

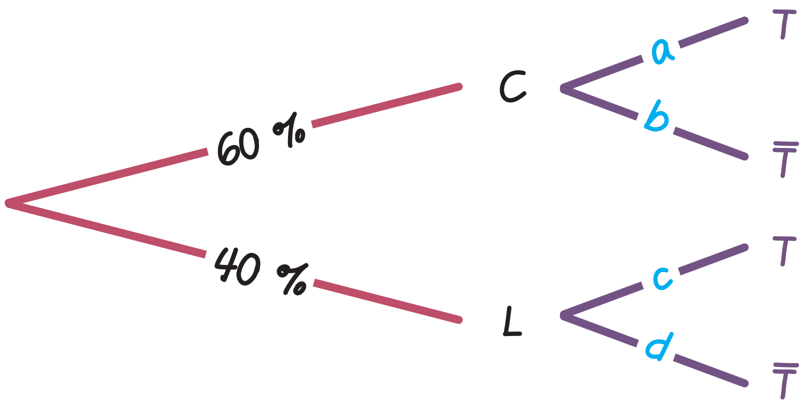
$(70\% + 30\% = 1)$.

Dans ces conditions, les probabilités demandées sont:

$$P(C) = 60\%,\ P(L) = 40\%,\ P(T) = 80\% \text{ et } P_C(T) = 70\%.$$

2. Représentons la situation par un arbre de probabilités:

L'arbre de probabilités est le suivant:



, avec:

- $a = 70\ \%$
- $b = 30\ \%$
- $c = ?$
- $d = ?$

3. Calculons la probabilité que le jeune choisi soit un collégien possédant un téléphone portable:

Cela revient à calculer: $P\ (\ C \cap T\ )$.

$P\ (\ C \cap T\ ) = P_C\ (\ T\ ) \times P\ (\ C\ )$.

Ainsi: $P\ (\ C \cap T\ ) = 70\% \times 60\%$ => $P\ (\ C \cap T\ ) = 42\%$.

Au total, il y a 42% de chance pour que le jeune soit un collégien et qu'il possède un téléphone portable.

4. Calculons $P_T\ (\ C\ )$:

$$P_T\ (\ C\ ) = \frac{P\ (\ C \cap T\ )}{P\ (\ T\ )}.$$

Ainsi: $P_T\ (\ C\ ) = \dfrac{42\%}{80\%}$ => $P_T\ (\ C\ ) = 52.5\%$.

Au total, il y a 52. 5% de chance pour que le jeune choisi soit un collégien sachant qu'il possède une téléphone portable.

5. a. Calculons $P(T \cap L)$ et déduisons-en $P_L(T)$:

• L'événement $T = (T \cap C) \cup (T \cap L)$.

D'où: $P(T) = P(T \cap C) + P(T \cap L)$

$\Rightarrow P(T \cap L) = P(T) - P(T \cap C)$.

Ainsi: $P(T \cap L) = 80\% - 42\% \Rightarrow P(T \cap L) = 38\%$.

• Or: $P_L(T) = \dfrac{P(T \cap L)}{P(L)}$.

Ainsi: $P_L(T) = \dfrac{38\%}{40\%} \Rightarrow P_L(T) = 95\%$.

Les probabilités demandées sont donc: $P(T \cap L) = 38\%$ et $P_L(T) = 95\%$.

5. b. Complétons l'arbre:

L'arbre de probabilités est complet avec: $c = 95\%$ et $d = 5\%$.

EXERCICE 2

[Liban 2016]

Partie B: L'Arcep

1. Calculons la probabilité qu'un adolescent envoie entre 2 000 et 3000 SMS par mois:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X est la variable aléatoire qui correspond au nombre de SMS envoyés par un adolescent en 1 mois.
- X suit la loi normale d'espérance $\mu = 2500$ et d'écart type $\sigma = 650$.
- T suit la loi normale centrée réduite.

Il s'agit de calculer: $P\,(2000 \leqslant X \leqslant 3000)$.

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$P\,(2000 \leqslant X \leqslant 3000) \approx 55,8\%.$$

Au total, la probabilité qu'un adolescent envoie entre 2 000 et 3000 SMS par mois est de: 55, 8%.

2. Calculons $P\,(X \geqslant 4000)$:

$$P\,(X \geqslant 4000) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geqslant \frac{4000-2500}{650}\right)$$

$$= P\,(T \geqslant 2,3)$$

$= 1 - P(T \leqslant 2,3).$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $P(X \geqslant 4000) \approx 1,1\%.$

3. Déterminons la valeur de " a " sachant que $P(X \leqslant a) = 0,8$:

$$P(X \leqslant a) = 0,8 \iff P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leqslant \frac{a - 2500}{650}\right) = 0,8$$

$$\iff P\left(T \leqslant \frac{a - 2500}{650}\right) = 0,8.$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$\frac{a - 2500}{650} \approx 0,8416 \implies a \approx 3047.$$

Au total, la valeur recherchée pour " a " est d'environ: 3047 SMS.