Corrigé

Exercice 4

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2016

MATHÉMATIQUES
- Série ES -

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures - Coefficient : 5

MATHÉMATIQUES
- Série L -

ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

Durée de l'épreuve : 3 heures - Coefficient : 4

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.

EXERCICE 4 (6 points)

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[3\,;13]$ par : $f(x) = -2x + 20 - \mathrm{e}^{-2x+10}$.

Partie A : Étude de la fonction *f*

1) Montrer que la fonction dérivée $f\,'$ de la fonction f, définie pour tout x de l'intervalle $[3\,;13]$, a pour expression :

$$f\,'(x) = 2(-1 + \mathrm{e}^{-2x+10}).$$

2) a) Résoudre dans l'intervalle $[3\,;13]$ l'inéquation : $f\,'(x) \geq 0$.

b) En déduire le signe de $f\,'(x)$ sur l'intervalle $[3\,;13]$ et dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle. Les valeurs du tableau seront, si besoin, arrondies à 10^{-3}.

c) Calculer l'intégrale $\int_3^{13} f(x)dx$. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près.

Partie B : Application

Une usine fabrique et commercialise des toboggans. Sa capacité mensuelle de production est comprise entre 300 et 1 300. On suppose que toute la production est commercialisée.
Le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x centaines de toboggans est modélisé sur l'intervalle $[3\,;13]$ par la fonction f.

En utilisant la partie A, répondre aux questions suivantes :

1) Déterminer le nombre de toboggans que l'usine doit produire pour obtenir un bénéfice maximal et donner ce bénéfice, arrondi à l'euro.

2) Calculer le bénéfice moyen pour une production mensuelle comprise entre 300 et 1300 toboggans. Arrondir le résultat à l'euro.

Partie C : Rentabilité

Pour être rentable, l'usine doit avoir un bénéfice positif.

Déterminer le nombre minimum et le nombre maximum de toboggans que l'usine doit fabriquer en un mois pour qu'elle soit rentable. Justifier la réponse.

EXERCICE 4

[Liban 2016]

Partie A: Étude de la fonction f

1. Montrons que $f'(x) = 2(-1 + e^{-2x+10})$:

Ici: • $f(x) = -2x + 20 - e^{-2x+10}$

• $Df = [3;13]$.

Posons: $f = f_1 + (-f_2)$, avec: $f_1(x) = -2x + 20$ et $-f_2(x) = -e^{-2x+10}$.

f_1 est dérivable sur IR comme fonction polynôme, donc dérivable sur $[3;13]$.

f_2 est dérivable sur IR comme fonction " exponentielle ", donc dérivable sur l'intervalle $[3;13]$.

Par conséquent, f est dérivable sur $[3;13]$ comme somme de 2 fonctions dérivables sur $[3;13]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [3;13]$.

Pour tout $x \in [3;13]$: $f'(x) = -2 - (-2)e^{-2x+10}$

=> $f'(x) = 2(-1 + e^{-2x+10})$.

Au total: pour tout $x \in [3;13]$, $f'(x) = 2(-1 + e^{-2x+10})$.

2. a. Résolvons dans $[3;13]$, $f'(x) \geqslant 0$:

$f'(x) \geqslant 0 \iff 2(-1 + e^{-2x+10}) \geqslant 0$

$\iff e^{-2x+10} \geqslant 1$

$\iff -2x + 10 \geqslant \ln(1)$

$\Rightarrow x \leqslant 5.$

Au total: $f'(x) \geqslant 0 \iff x \in [3;5].$

2. b. b1. Déduisons-en le signe de f' sur $[3;13]$:

Nous allons distinguer 3 cas, pour tout $x \in [3;13]$:

- **1^er^ cas**: $f'(x) = 0.$

$f'(x) = 0$ ssi: $x = 5.$

- **2^eme^ cas**: $f'(x) < 0.$

$f'(x) < 0$ ssi: $x \in]5;13].$

- **3^eme^ cas**: $f'(x) > 0.$

$f'(x) > 0$ ssi: $x \in [3;5[.$

Au total:
- f est croissante sur $[3;5]$, ou strictement croissante sur $[3;5[$,
- f est décroissante sur $[5;13]$, ou strictement décroissante sur $]5;13].$

2. b. b2. Dressons le tableau de variation de f sur $[3;13]$:

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	3		5		13
f'		+	0	−	
f		↗	b	↘	
	a				c

Avec: • $a = f(3) \Rightarrow a = 14 - e^4 < 0$,

• $b = f(5) \Rightarrow b = 10 - e^0 \Rightarrow b = 9$,

• $c = f(13) \Rightarrow c = -6 - e^{-16} < 0$.

Au total, nous venons de dresser le tableau de variation de f sur $[3;13]$.

2. c. Calculons l'intégrale $\int_3^{13} f(x)dx$:

Ici, il s'agit de calculer: $I = \int_3^{13} f(x)dx$.

f est continue sur $[3;13]$, elle admet donc des primitives sur $[3;13]$ et par conséquent: I existe.

$$I = \int_3^{13} (-2x + 20 - e^{-2x+10})dx$$

$$= [-x^2 + 20x + \frac{1}{2}e^{-2x+10}]_3^{13}$$

$$\Rightarrow I = 40 + \frac{1}{2}e^{-16} - \frac{1}{2}e^4.$$

En arrondissant à 10^{-3} près, nous obtenons:

$I \approx 12,701$ à 10^{-3} près.

Au total: • la valeur exacte de I est: $40 + \frac{1}{2}(e^{-16} - e^4)$,

• la valeur approchée de I est: $12,701$ à 10^{-3} près.

Partie B: Application

1. a. Déterminons le nombre de toboggans que l'usine doit produire pour obtenir un bénéfice maximal:

Nous avons vu à la question 2. b. b2. que la fonction f admet un maximun au point: $x_b = 5$.

Ainsi, le nombre de toboggans que l'usine doit produire pour obtenir un bénéfice maximal est: 500 toboggans.

1. b. Déterminons alors ce bénefice maximal:

Pour cela, il suffit de remplacer x par " 5 " dans la fonction f.

Ainsi nous obtenons: $\text{Bénéfice}_{max} = -2 \times 5 + 20 - e^{-2\times5+10}$

$\Rightarrow \text{Bénéfice}_{max} \approx 9$ en milliers d'€.

Au total, le bénéfice maximal engendré par la vente de 500 toboggans est de: 9000 €.

2. Calculons le bénéfice moyen:

Le bénéfice moyen pour une production mensuelle comprise entre 300 et 1300 toboggans correspond à la valeur moyenne de la fonction f sur $[3;13]$.

Soit B_m, le bénéfice moyen de f sur $[3;13]$.

B_m est tel que: $B_m = \dfrac{1}{13-3}\displaystyle\int_3^{13} f(x)\,dx$.

$$B_m = \frac{1}{13-3}\int_3^{13} f(x)\,dx \iff B_m = \frac{1}{10} \times 12,701$$

$$\Rightarrow B_m \approx 1,270 \text{ en milliers d'€.}$$

Au total, le bénéfice moyen est de: 1270 €.

Partie C: Rentabilité

Déterminons le nombre minimum et le nombre maximum de toboggans que l'usine doit fabriquer pour être rentable:

L'usine est rentable ssi: son bénéfice est positif

cad ssi: pour tout $x \in [3;13]$, $f(x) \geqslant 0$.

Pour répondre à cette question, nous allons dresser le tableau de la fonction f:

x	3		α		5		β		13
$f(x)$	a	$\nearrow$	0	$\nearrow$	b	$\searrow$	0	$\searrow$	c

Ainsi, $f(x) \geqslant 0$ ssi: $x \in [\alpha;\beta]$.

Par tâtonnement, on trouve: $\alpha \approx 3,74$ et $\beta \approx 9,99$.

Au total, pour avoir un bénéfice positif, l'usine doit fabriquer entre:

374 et 999 toboggans par mois.