EXERCICE 4

[Liban 2016]

Partie A: Étude de la fonction f

1. Montrons que $f'(x) = 2(-1 + e^{-2x+10})$:

Ici: • $f(x) = -2x + 20 - e^{-2x+10}$

• $Df = [3;13]$.

Posons: $f = f_1 + (-f_2)$, avec: $f_1(x) = -2x + 20$ et $-f_2(x) = -e^{-2x+10}$.

f_1 est dérivable sur IR comme fonction polynôme, donc dérivable sur $[3;13]$.

f_2 est dérivable sur IR comme fonction " exponentielle ", donc dérivable sur l'intervalle $[3;13]$.

Par conséquent, f est dérivable sur $[3;13]$ comme somme de 2 fonctions dérivables sur $[3;13]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [3;13]$.

Pour tout $x \in [3;13]$: $f'(x) = -2 - (-2)e^{-2x+10}$

$\Rightarrow$ $f'(x) = 2(-1 + e^{-2x+10})$.

Au total: pour tout $x \in [3;13]$, $f'(x) = 2(-1 + e^{-2x+10})$.

2. a. Résolvons dans [3;13], $f'(x) \geqslant 0$:

$f'(x) \geqslant 0 \iff 2(-1 + e^{-2x+10}) \geqslant 0$

$\iff e^{-2x+10} \geqslant 1$

$\iff -2x + 10 \geqslant \ln(1)$

$\Rightarrow x \leqslant 5.$

Au total: $f'(x) \geqslant 0 \iff x \in [3;5].$

2. b. b1. Déduisons-en le signe de f' sur [3;13]:

Nous allons distinguer 3 cas, pour tout $x \in [3;13]$:

- **1^er^ cas**: $f'(x) = 0.$

$f'(x) = 0$ ssi: $x = 5.$

- **2^eme^ cas**: $f'(x) < 0.$

$f'(x) < 0$ ssi: $x \in \,]5;13].$

- **3^eme^ cas**: $f'(x) > 0.$

$f'(x) > 0$ ssi: $x \in [3;5[.$

Au total: • f est croissante sur [3;5], ou strictement croissante sur [3;5[,

• f est décroissante sur [5;13], ou strictement décroissante sur]5;13].

2. b. b2. Dressons le tableau de variation de f sur [3;13]:

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	3		5		13
f'		+	0	−	
f	a	↗	b	↘	c

Avec: • $a = f(3) \Rightarrow a = 14 - e^4 < 0$,

• $b = f(5) \Rightarrow b = 10 - e^0 \Rightarrow b = 9$,

• $c = f(13) \Rightarrow c = -6 - e^{-16} < 0$.

Au total, nous venons de dresser le tableau de variation de f sur $[3;13]$.

2. c. Calculons l'intégrale $\int_3^{13} f(x)dx$:

Ici, il s'agit de calculer: $I = \int_3^{13} f(x)dx$.

f est continue sur $[3;13]$, elle admet donc des primitives sur $[3;13]$ et par conséquent: I existe.

$$I = \int_3^{13} (-2x + 20 - e^{-2x+10})dx$$

$$= [-x^2 + 20x + \frac{1}{2}e^{-2x+10}]_3^{13}$$

$$\Rightarrow I = 40 + \frac{1}{2}e^{-16} - \frac{1}{2}e^4.$$

En arrondissant à 10^{-3} près, nous obtenons:

$I \approx 12,701$ à 10^{-3} près.

Au total: • la valeur exacte de I est: $40 + \frac{1}{2}(e^{-16} - e^4)$,

• la valeur approchée de I est: $12,701$ à 10^{-3} près.

Partie B: Application

1. a. Déterminons le nombre de toboggans que l'usine doit produire pour obtenir un bénéfice maximal:

Nous avons vu à la question 2. b. b2. que la fonction f admet un maximun au point: $x_b = 5$.

Ainsi, le nombre de toboggans que l'usine doit produire pour obtenir un bénéfice maximal est: 500 toboggans.

1. b. Déterminons alors ce bénefice maximal:

Pour cela, il suffit de remplacer x par " 5 " dans la fonction f.

Ainsi nous obtenons: $\text{Bénéfice}_{max} = -2 \times 5 + 20 - e^{-2 \times 5 + 10}$

$\Rightarrow \text{Bénéfice}_{max} \approx 9$ en milliers d'€.

Au total, le bénéfice maximal engendré par la vente de 500 toboggans est de: 9000 €.

2. Calculons le bénéfice moyen:

Le bénéfice moyen pour une production mensuelle comprise entre 300 et 1300 toboggans correspond à la valeur moyenne de la fonction f sur $[3;13]$.

Soit B_m, le bénéfice moyen de f sur $[3;13]$.

B_m est tel que: $B_m = \dfrac{1}{13-3} \displaystyle\int_3^{13} f(x)\,dx$.

$$B_m = \frac{1}{13-3}\int_3^{13} f(x)dx \iff B_m = \frac{1}{10} \times 12,701$$

$$\Rightarrow B_m \approx 1,270 \text{ en milliers d'€.}$$

Au total, le bénéfice moyen est de: 1270 €.

Partie C: Rentabilité

Déterminons le nombre minimum et le nombre maximum de toboggans que l'usine doit fabriquer pour être rentable:

L'usine est rentable ssi: son bénéfice est positif

cad ssi: pour tout $x \in [3;13]$, $f(x) \geqslant 0$.

Pour répondre à cette question, nous allons dresser le tableau de la fonction f:

x	3	α	5	β	13
$f(x)$	a	0	b	0	c

Ainsi, $f(x) \geqslant 0$ ssi: $x \in [\alpha;\beta]$.

Par tâtonnement, on trouve: $\alpha \approx 3,74$ et $\beta \approx 9,99$.

Au total, pour avoir un bénéfice positif, l'usine doit fabriquer entre:

374 et 999 toboggans par mois.