

EXERCICE 3

[Liban 2016]

1. a. Estimons le nombre de contrats d'entretien en 2016:

Il s'agit de calculer U_1 .

$$U_1 = (1 + 12\%) U_0 - 6 \Leftrightarrow U_1 = 1,12 \times 75 - 6$$

$$\Leftrightarrow U_1 = 84 - 6 \Rightarrow U_1 = 78 \text{ contrats souscrits.}$$

Ainsi, le nombre de contrats d'entretien en 2016 sera de: 78.

1. b. Montrons que, pour tout entier n , $U_{n+1} = 1,12 U_n - 6$:

• D'après l'énoncé, en 2015, l'entreprise dénombrait 75 contrats souscrits.

D'où: $U_0 = 75$.

• De plus, chaque année leur nombre augmente de 12% et 6 contrats sont résiliés.

Soient: • U_{n+1} , le nombre de contrats souscrits en $(2015 + (n + 1))$,

• U_n , le nombre de contrats souscrits en $(2015 + (n))$.

Pour tout entier naturel n , le nombre U_{n+1} de contrats souscrits est égal au nombre U_n de contrats souscrits augmenté de 12% et diminué de " 6 contrats résiliés ".

Donc pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = U_n + 12\% U_n - 6 \Leftrightarrow U_{n+1} = 1,12 U_n - 6.$$

2. a. Recopions et complétons la ligne Lg:

D'après l'énoncé, on cherche à connaître en quelle année l'entreprise devra embaucher.

Or "n" correspond à l'année 2015 + n.

Ainsi, la ligne Lg s'écrit:

Lg | Sortie: | Afficher 2015 + n

2. b. Tableau recopié et complété:

Le tableau recopié et complété est le suivant :

Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6	7
Valeur de U	75	78	81	85	89	94	99	105

2. c. Donnons et interprétons la valeur affichée à la fin de l'exécution:

La valeur affichée est: $n = 7$ (cad 2022).

Cela signifie que l'entreprise devra embaucher à partir de la 7^{ème} année cad 2022.

3. a. Montrons que (V_n) est géométrique et déterminons V_0 et q:

$$V_n = U_n - 50 \Leftrightarrow V_{n+1} = U_{n+1} - 50$$

$$\Leftrightarrow V_{n+1} = (1,12 U_n - 6) - 50 \quad (1).$$

$$\text{Or: } V_0 = U_0 - 50 \Rightarrow V_0 = 25 \text{ et } U_n = V_n + 50.$$

$$\text{Ainsi: } (1) \Leftrightarrow V_{n+1} = (1,12 [V_n + 50] - 6) - 50$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = 1,12 V_n$$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 1,12$ et de premier terme $V_0 = 25$.

3. b. b1. Exprimons V_n en fonction de n :

Comme $V_{n+1} = 1,12 V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$V_n = V_0 \times (1,12)^n, \text{ avec: } V_0 = 25.$$

3. b. b2. Déduisons-en que pour tout entier naturel n , $U_n = 25 \times 1,12^n + 50$:

Nous savons que: * $V_n = 25 \times (1,12)^n$

$$* U_n = V_n + 50.$$

D'où: $U_n = 25 \times 1,12^n + 50$.

3. c. Résolvons l'inéquation $U_n > 100$:

$$U_n > 100 \Leftrightarrow 25 \times 1,12^n + 50 > 100$$

$$\Leftrightarrow 1,12^n > 2$$

$$\Leftrightarrow n \ln(1,12) > \ln 2$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln 2}{\ln(1,12)}, \text{ car: } 1,12 > 1, \text{ et donc: } \ln(1,12) > 0$$

$$\Rightarrow n > 6,1162.$$

Nous prendrons $n = 7$ ans car n est un entier naturel.

Cela signifie qu'à partir de 2022 ($2015 + 7$), le nombre de contrats souscrits dépassera le nombre 100.

3. d. Quel résultat de la question 2., retrouve-t-on ?

Nous retrouvons l'affichage de l'algorithme cad l'année $2015 + 7$ (2022).