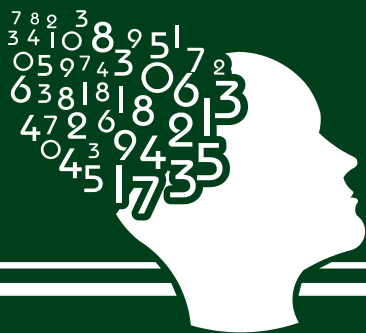


Corrigé

Exercice 3



freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2016

MATHÉMATIQUES

- Série ES -

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures - Coefficient : 5

MATHÉMATIQUES

- Série L -

ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

Durée de l'épreuve : 3 heures - Coefficient : 4

*Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.*

*Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte
pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou
non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront
pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.

EXERCICE 3 (5 points)

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

L'entreprise PiscinePlus, implantée dans le sud de la France, propose des contrats annuels d'entretien aux propriétaires de piscines privées.

Le patron de cette entreprise remarque que, chaque année, 12 % de contrats supplémentaires sont souscrits et 6 contrats résiliés. Il se fonde sur ce constat pour estimer le nombre de contrats annuels à venir.

En 2015, l'entreprise PiscinePlus dénombrait 75 contrats souscrits.

On modélise la situation par une suite (u_n) où u_n représente le nombre de contrats souscrits auprès de l'entreprise PiscinePlus l'année 2015+ n . Ainsi, on a $u_0 = 75$.

1) a) Estimer le nombre de contrats d'entretien en 2016.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} = 1,12 u_n - 6$.

2) L'entreprise PiscinePlus peut prendre en charge un maximum de 100 contrats avec son nombre actuel de salariés. Au-delà, l'entreprise devra embaucher davantage de personnel.

On cherche à connaître en quelle année l'entreprise devra embaucher. Pour cela, on utilise l'algorithme suivant :

L1	Variables :	n est un nombre entier naturel
L2		U est un nombre réel
L3	Traitement :	Affecter à n la valeur 0
L4		Affecter à U la valeur 75
L5		Tant que $U \leq 100$ faire
L6		n prend la valeur $n + 1$
L7		U prend la valeur $1,12 U - 6$
L8		Fin Tant que
L9	Sortie :	Afficher.....

a) Recopier et compléter la ligne L9.

b) Recopier et compléter le tableau ci-dessous, en ajoutant autant de colonnes que nécessaire pour permettre la réalisation de l'algorithme ci-dessus. On arrondira les résultats à l'unité.

Valeur de n	0		
Valeur de U	75		

c) Donner la valeur affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme puis interpréter cette valeur dans le contexte de cet exercice.

3) On rappelle que, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = 1,12u_n - 6$ et $u_0 = 75$.

On pose pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 50$.

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. En préciser la raison et le premier terme.

b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis montrer que, pour tout entier naturel n , on a $u_n = 25 \times 1,12^n + 50$.

c) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $u_n > 100$.

d) Quel résultat de la question 2) retrouve-t-on ?

EXERCICE 3

[Liban 2016]

1. a. Estimons le nombre de contrats d'entretien en 2016:

Il s'agit de calculer U_1 .

$$U_1 = (1 + 12\%) U_0 - 6 \Leftrightarrow U_1 = 1,12 \times 75 - 6$$

$$\Leftrightarrow U_1 = 84 - 6 \Rightarrow U_1 = 78 \text{ contrats souscrits.}$$

Ainsi, le nombre de contrats d'entretien en 2016 sera de: 78.

1. b. Montrons que, pour tout entier n , $U_{n+1} = 1,12 U_n - 6$:

• D'après l'énoncé, en 2015, l'entreprise dénombrait 75 contrats souscrits.

D'où: $U_0 = 75$.

• De plus, chaque année leur nombre augmente de 12% et 6 contrats sont résiliés.

Soient: • U_{n+1} , le nombre de contrats souscrits en $(2015 + (n + 1))$,

• U_n , le nombre de contrats souscrits en $(2015 + (n))$.

Pour tout entier naturel n , le nombre U_{n+1} de contrats souscrits est égal au nombre U_n de contrats souscrits augmenté de 12% et diminué de " 6 contrats résiliés ".

Donc pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = U_n + 12\% U_n - 6 \Leftrightarrow U_{n+1} = 1,12 U_n - 6.$$

2. a. Recopions et complétons la ligne Lg:

D'après l'énoncé, on cherche à connaître en quelle année l'entreprise devra embaucher.

Or "n" correspond à l'année 2015 + n.

Ainsi, la ligne Lg s'écrit:

Lg | Sortie: | Afficher 2015 + n

2. b. Tableau recopié et complété:

Le tableau recopié et complété est le suivant :

Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6	7
Valeur de U	75	78	81	85	89	94	99	105

2. c. Donnons et interprétons la valeur affichée à la fin de l'exécution:

La valeur affichée est: $n = 7$ (cad 2022).

Cela signifie que l'entreprise devra embaucher à partir de la 7^{ème} année cad 2022.

3. a. Montrons que (V_n) est géométrique et déterminons V_0 et q:

$$V_n = U_n - 50 \Leftrightarrow V_{n+1} = U_{n+1} - 50$$

$$\Leftrightarrow V_{n+1} = (1,12 U_n - 6) - 50 \quad (1).$$

$$\text{Or: } V_0 = U_0 - 50 \Rightarrow V_0 = 25 \text{ et } U_n = V_n + 50.$$

$$\text{Ainsi: } (1) \Leftrightarrow V_{n+1} = (1,12 [V_n + 50] - 6) - 50$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = 1,12 V_n$$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 1,12$ et de premier terme $V_0 = 25$.

3. b. b1. Exprimons V_n en fonction de n :

Comme $V_{n+1} = 1,12 V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$V_n = V_0 \times (1,12)^n, \text{ avec: } V_0 = 25.$$

3. b. b2. Déduisons-en que pour tout entier naturel n , $U_n = 25 \times 1,12^n + 50$:

Nous savons que: * $V_n = 25 \times (1,12)^n$

$$* U_n = V_n + 50.$$

D'où: $U_n = 25 \times 1,12^n + 50$.

3. c. Résolvons l'inéquation $U_n > 100$:

$$U_n > 100 \Leftrightarrow 25 \times 1,12^n + 50 > 100$$

$$\Leftrightarrow 1,12^n > 2$$

$$\Leftrightarrow n \ln(1,12) > \ln 2$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln 2}{\ln(1,12)}, \text{ car: } 1,12 > 1, \text{ et donc: } \ln(1,12) > 0$$

$$\Rightarrow n > 6,1162.$$

Nous prendrons $n = 7$ ans car n est un entier naturel.

Cela signifie qu'à partir de 2022 ($2015 + 7$), le nombre de contrats souscrits dépassera le nombre 100.

3. d. Quel résultat de la question 2., retrouve-t-on ?

Nous retrouvons l'affichage de l'algorithme cad l'année $2015 + 7$ (2022).