

Corrigé

Exercice 3



freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2015

MATHÉMATIQUES

- Série ES -

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 7

*Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.*

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1 à 6.

EXERCICE 3 (6 points)

Commun à tous les candidats

Les trois parties peuvent être traitées indépendamment.

Les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-3} .

Une entreprise fabrique en grande quantité des médailles circulaires.

La totalité de la production est réalisée par deux machines M_A et M_B .

La machine M_A fournit 40 % de la production totale et M_B le reste.

La machine M_A produit 2 % de médailles défectueuses et la machine M_B produit 3 % de médailles défectueuses.

Partie A

On prélève au hasard une médaille fabriquée par l'entreprise et on considère les événements suivants :

- A : « la médaille provient de la machine M_A » ;
- B : « la médaille provient de la machine M_B » ;
- D : « la médaille est défectueuse » ;
- \bar{D} est l'événement contraire de D .

1) a) Traduire cette situation par un arbre pondéré.

b) Montrer que la probabilité qu'une médaille soit défectueuse est égale à 0,026.

c) Calculer la probabilité qu'une médaille soit produite par la machine M_A sachant qu'elle est défectueuse.

2) Les médailles produites sont livrées par lots de 20.

On prélève au hasard un lot de 20 médailles dans la production.

On suppose que la production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise. Les tirages sont supposés indépendants.

On note X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de médailles défectueuses contenues dans ce lot.

a) Préciser la loi que suit X et donner ses paramètres.

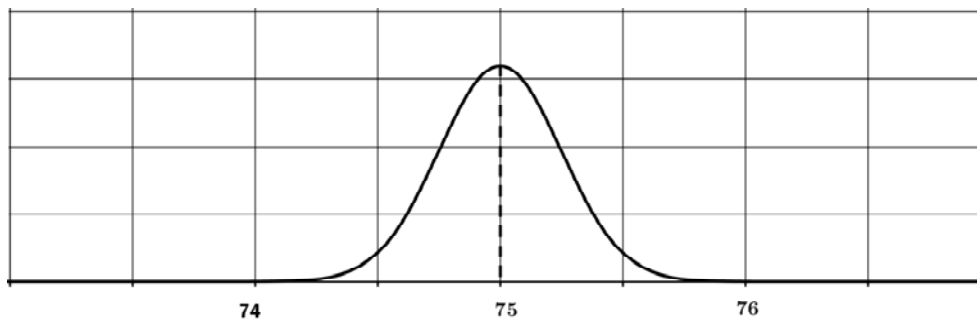
b) Calculer la probabilité qu'il y ait au plus une médaille défectueuse dans ce lot.

Partie B

Le diamètre, exprimé en millimètre, d'une médaille fabriquée par cette entreprise est conforme lorsqu'il appartient à l'intervalle $[74,4 ; 75,6]$.

On note Y la variable aléatoire qui, à chaque médaille prélevée au hasard dans la production, associe son diamètre en millimètre. On suppose que la variable aléatoire Y suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type 0,25.

La courbe ci-dessous est la représentation graphique de la densité de probabilité de Y .



- 1) Indiquer par lecture graphique la valeur de μ .
- 2) Déterminer à l'aide de la calculatrice la probabilité $P(74,4 \leq Y \leq 75,6)$.
- 3) En utilisant un résultat du cours, déterminer la valeur de h pour que

$$P(75 - h \leq Y \leq 75 + h) \approx 0,95.$$

Partie C

Dans le cadre d'un fonctionnement correct de la machine M_B , on admet que la proportion des médailles ayant une épaisseur non conforme dans la production est 3 %.

Pour contrôler le bon fonctionnement de la machine M_B , on a prélevé au hasard un échantillon de 180 médailles et on a constaté que 11 médailles ont une épaisseur non conforme.

- 1) Calculer, dans l'échantillon prélevé, la fréquence des médailles dont l'épaisseur n'est pas conforme.
- 2) Déterminer, en justifiant, si le résultat de la question précédente rend pertinente la prise de décision d'arrêter la production pour procéder au réglage de la machine M_B .

EXERCICE 3

[Liban 2015]

Partie A: Les médailles circulaires

1. a. Représentons la situation par un arbre pondéré:

D'après l'énoncé, nous avons:

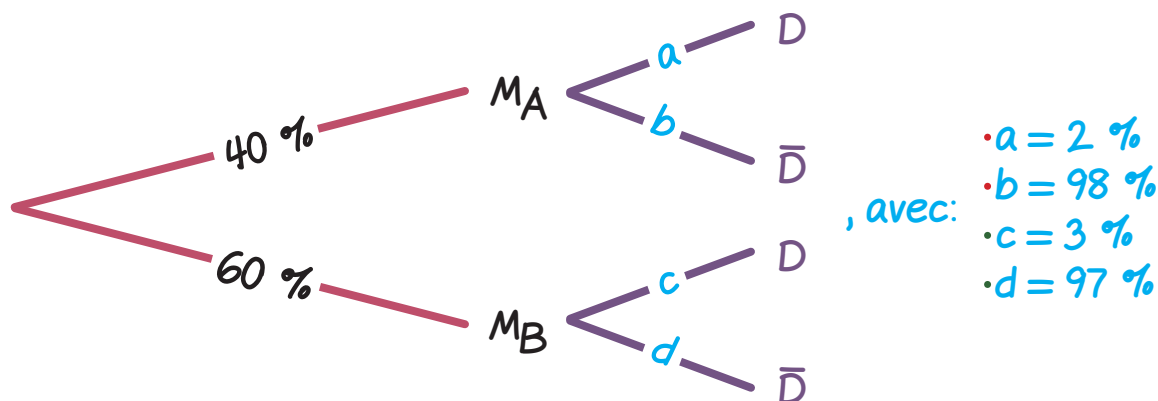
- $A =$ " la médaille provient de M_A ".
- $B =$ " la médaille provient de M_B ".
- $D =$ " la médaille est défectueuse ".
- $\bar{D} =$ " la médaille n'est pas défectueuse ".

- $P(M_A) = 40\%$
- $P(M_B) = 60\%$
($40\% + 60\% = 1$).

- $P_{M_A}(D) = 2\%$
- $P_{M_A}(\bar{D}) = 98\%$
($2\% + 98\% = 1$).

- $P_{M_B}(D) = 3\%$
- $P_{M_B}(\bar{D}) = 97\%$
($3\% + 97\% = 1$).

D'où l'arbre pondéré suivant:



1. b. Montrons que $P(D) = 0.026$:

L'événement $D = (D \cap M_A) \cup (D \cap M_B)$.

D'où: $P(D) = P(D \cap M_A) + P(D \cap M_B)$

$$= P_{M_A}(D) \times P(M_A) + P_{M_B}(D) \times P(M_B)$$

Ainsi: $P(D) = 2\% \times 40\% + 3\% \times 60\% \Rightarrow P(D) = 0.026$.

Au total, il y a 2.6% de chance pour que la médaille soit défectueuse.

1. c. Calculons $P_D(M_A)$:

$$\begin{aligned} P_D(M_A) &= \frac{P(D \cap M_A)}{P(D)} \\ &= \frac{P_{M_A}(D) \times P(M_A)}{P(D)} \end{aligned}$$

Ainsi: $P_D(M_A) = \frac{2\% \times 40\%}{2.6\%} \Rightarrow P_D(M_A) \approx 30.8\%$.

Au total, il y a 30.8% de chance pour que la médaille soit produite par la machine M_A sachant qu'elle est défectueuse.

2. a. Précisons la loi que suit X ainsi que ses paramètres:

Soit l'expérience aléatoire consistant à choisir au hasard un lot de 20 médailles dans la production.

Soient les événements $A =$ " la médaille est défectueuse ", et $\bar{A} =$ " la médaille n'est pas défectueuse ".

On désigne par X le nombre de fois où l'événement A s'est réalisé au cours des 20 épreuves.

Nous sommes en présence de 20 épreuves aléatoires indépendantes avec $\Omega = \{ A ; \bar{A} \}$ et $X(\Omega) = \{ 0, 1, 2, \dots, 20 \}$.

En fait, on répète 20 fois un schéma de Bernoulli.

La variable aléatoire X représentant le nombre de réalisations de A suit donc une loi binômiale de paramètres: $n = 20$ et $p = 2.6\%$.

Et nous pouvons noter: $X \rightsquigarrow B(20; 2.6\%)$.

2. b. Calculons $P(X \leq 1)$:

$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$, avec: $X \rightsquigarrow B(20; 2.6\%)$.

$$\begin{aligned} \text{D'où: } P(X \leq 1) &= \binom{20}{0} (2.6\%)^0 (1 - 2.6\%)^{20} + \binom{20}{1} (2.6\%)^1 (1 - 2.6\%)^{19} \\ &\Rightarrow P(X \leq 1) \approx 90.6\%. \end{aligned}$$

(à l'aide d'une machine à calculer)

Au total, il y a 90.6% de chance pour qu'il y ait au plus 1 médaille défectueuse dans ce lot de 20 médailles.

EXERCICE 3

[Liban 2015]

Partie B: Diamètre d'une médaille

1. Indiquons par lecture graphique la valeur de μ :

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X est la variable aléatoire qui, à chaque médaille, fabriquée prélevée au hasard dans la production, associe son diamètre (en millimètre).
- X suit la loi normale d'espérance $\mu = ?$ et d'écart type $\sigma = 0,25$.

La valeur de μ correspond au maximum de la courbe.

D'où: $\mu = 75$ millimètres.

2. Déterminons $P(74,4 \leq X \leq 75,6)$:

Il s'agit de calculer: $P(74,4 \leq X \leq 75,6)$.

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$P(74,4 \leq X \leq 75,6) \approx 0,984.$$

Au total, la probabilité demandée est de: 98,4%.

3. Déterminons la valeur de " h " avec $P(75 - h \leq X \leq 75 + h) \approx 0,95$:

Nous savons que: $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,954$.

Ici, nous avons: $P(75 - 2\sigma \leq X \leq 75 + 2\sigma) \approx 0,954$.

Par identification, nous avons: $h = 2\sigma \Rightarrow h = 0,5$.

Au total, la valeur recherchée de h est: $h = 0,5$.

Partie C: Epaisseur d'une médaille

1. Calculons la fréquence des médailles non conformes:

La fréquence des médailles dont l'épaisseur n'est pas conforme est:

$$f \approx \frac{11}{180} \Rightarrow f \approx 6,1\%.$$

2. Arrêter la production pour procéder au réglage de la machine M_B ?

Ici, nous avons: • $n = 180$

• $p = 3\%$

• $f \approx 6,1\%$.

Dans ces conditions:

$$n = 180 \geq 30, n \cdot p = 5,4 \geq 5 \text{ et } n \cdot (1 - p) = 174,6 \geq 5.$$

Les conditions sont donc réunies.

On choisit un échantillon aléatoire de 180 médailles.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% s'écrit:

$$I = \left[p - 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right].$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $I \approx [0,507\% ; 5,492\%]$.

Or, la fréquence de médailles "f" dont l'épaisseur n'est pas conforme, sur l'échantillon, est telle que:

$$f \approx 6,1\% \notin I.$$

Ainsi, il faut arrêter la production pour procéder au réglage de la machine M_B .