EXERCICE 4

[Liban 2015]

1. a. Montrons en justifiant que $V_1 = 95500$ m^3:

Nous avons: $V_1 = (V_0 - 4\%\ V_0) - (500)$.

évaporation   libération

D'où: $V_1 = V_0\,(1 - 4\%) - 500 \iff V_1 = 0,96 \times 100000 - 500$

$\Rightarrow V_1 = 95500$ m^3.

Nous avons donc bien: $V_1 = 95500$ m^3.

1. b. Déterminons V_2:

Il s'agit de calculer V_2.

$V_2 = (V_1 - 4\%\ V_1) - 500 \iff V_2 = 0,96 \times 95500 - 500$

$\Rightarrow V_2 = 91180$ m^3.

Ainsi: • au matin du 2 juillet 2013, le volume d'eau sera de 95500 m^3,

• au matin du 3 juillet 2013, le volume d'eau sera de 91180 m^3.

1. c. Montrons que, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = 0,96 \times V_n - 500$:

• D'après l'énoncé, au 1er juillet 2013, le volume d'eau en m^3 est de 100000.

D'où: $V_0 = 100000$ m^3.

• De plus, chaque jour le volume total de l'eau baisse de 4% (évaporation) et diminue parallèlement de 500 m^3 (libération).

Soient: • V_{n+1}, le volume d'eau en m^3 au matin du $(n+1)$-ième jour qui suit le 1^{er} juillet 2013,

• V_n, le volume d'eau en m^3 au matin du (n)-ième jour qui suit le 1^{er} juillet 2013.

Pour tout entier naturel n, le volume d'eau V_{n+1} est égal au volume d'eau V_n diminué de 4% et de 500 m^3.

Donc pour tout entier naturel n:

$V_{n+1} = (V_n - 4\%\ V_n) - (500) \iff V_{n+1} = 0,96\ V_n - 500.$

2. Recopions et complétons les lignes L_6, L_7 et L_9:

Les lignes L_6, L_7 et L_9 complétées sont les suivantes:

• L_6: Affecter à V la valeur 0, 96 x V - 500

• L_7: Affecter à N la valeur N + 1

• L_9: Sortie: Afficher N

3. a. Montrons que (U_n) est géométrique et déterminons U_0 et q:

$U_n = V_n + 12\,500 \iff U_{n+1} = V_{n+1} + 12\,500$

$\iff U_{n+1} = (0,96\ V_n - 500) + 12\,500 \quad (1).$

Or: $U_0 = V_0 + 12\,500 \Rightarrow U_0 = 112\,500$ et $V_n = U_n - 12\,500.$

Ainsi: $(1) \iff U_{n+1} = (0,96\,[U_n - 12\,500] - 500) + 12\,500$

$\Rightarrow U_{n+1} = 0,96\ U_n.$

Par conséquent, (U_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,96$ et de premier terme $U_0 = 112\,500$.

3. b. Exprimons U_n en fonction de n:

Comme $U_{n+1} = 0,96\,U_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$U_n = U_0 \times (0,96)^n, \quad \text{avec:} \quad U_0 = 112\,500.$$

3. c. Déduisons-en V_n, pour tout entier naturel n:

Nous savons que: * $U_n = 112\,500 \times (0,96)^n$

* $V_n = U_n - 12\,500.$

D'où: $V_n = 112\,500 \times (0,96)^n - 12\,500.$

4. a. Résolvons l'inéquation dans l'ensemble des entiers naturels:

$V_n \leqslant 0 \iff 112\,500 \times (0,96)^n - 12\,500 \leqslant 0$

$\iff n \ln(0,96) \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{9}\right)$

$\iff n \ln(0,96) \leqslant -\ln(9)$

$\iff n \geqslant \dfrac{-\ln(9)}{\ln(0,96)}$ car: $0,96 \in \,]0, 1[$, et donc: $\ln(0,96) < 0$

$\Rightarrow n \geqslant 54$, car n est un entier naturel.

Les solutions de l'inéquation est l'ensemble des entiers naturels avec $n \geqslant 54$.

4. b. Interprétation:

Cela signifie qu'à partir du 54ème jour (1er juillet 2013 + 54 jours) au delà du 1er juillet 2013, la retenue d'eau artificielle sera vide.