Corrigé

Exercice 4

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2015

MATHÉMATIQUES
- Série ES -

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures - Coefficient : 5

MATHÉMATIQUES
- Série L -

ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

Durée de l'épreuve : 3 heures - Coefficient : 4

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.

EXERCICE 4 (5 points)

Commun à tous les candidats

Une retenue d'eau artificielle contient 100 000 m^3 d'eau le 1er juillet 2013 au matin.
La chaleur provoque dans la retenue une évaporation de 4 % du volume total de l'eau par jour. De plus, chaque soir, on doit libérer de la retenue 500 m^3 pour l'irrigation des cultures aux alentours.
Cette situation peut être modélisée par une suite (V_n).
Le premier juillet 2013 au matin, le volume d'eau en m^3 est $V_0 = 100\,000$.

Pour tout entier naturel n supérieur à 0, V_n désigne le volume d'eau en m^3 au matin du n-ième jour qui suit le 1er juillet 2013.

1) a) Justifier que le volume d'eau V_1 au matin du 2 juillet 2013 est égal à $95\,500$ m^3.
b) Déterminer le volume d'eau V_2 au matin du 3 juillet 2013.
c) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $V_{n+1} = 0{,}96V_n - 500$.

2) Pour déterminer à quelle date la retenue ne contiendra plus d'eau, on a commencé par élaborer l'algorithme ci-dessous. Recopier et compléter les lignes **L6**, **L7** et **L9** de cet algorithme pour qu'il donne le résultat attendu.

L1	**Variables :**	V est un nombre réel
L2		N est un entier naturel
L3	**Traitement :**	Affecter à V la valeur 100 000
L4		Affecter à N la valeur 0
L5		Tant que $V > 0$
L6		Affecter à V la valeur ………
L7		Affecter à N la valeur ………
L8		Fin Tant que
L9	**Sortie** :	Afficher …….

3) On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_n = V_n + 12\,500$.
a) Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique de raison 0,96. Préciser son premier terme.
b) Exprimer U_n en fonction de n.
c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $V_n = 112\,500 \times 0{,}96^n - 12\,500$.

4) a) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $112\,500 \times 0{,}96^n - 12\,500 \leq 0$.
b) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

EXERCICE 4

[Liban 2015]

1. a. Montrons en justifiant que $V_1 = 95500$ m³:

Nous avons: $V_1 = (V_0 - 4\%\ V_0) - (500)$.

évaporation   libération

D'où: $V_1 = V_0\,(1 - 4\%) - 500 \iff V_1 = 0,96 \times 100000 - 500$

$\Rightarrow V_1 = 95500\ m^3$.

Nous avons donc bien: $V_1 = 95500\ m^3$.

1. b. Déterminons V_2:

Il s'agit de calculer V_2.

$V_2 = (V_1 - 4\%\ V_1) - 500 \iff V_2 = 0,96 \times 95500 - 500$

$\Rightarrow V_2 = 91180\ m^3$.

Ainsi:
- au matin du 2 juillet 2013, le volume d'eau sera de $95500\ m^3$,
- au matin du 3 juillet 2013, le volume d'eau sera de $91180\ m^3$.

1. c. Montrons que, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = 0,96 \times V_n - 500$:

- D'après l'énoncé, au 1er juillet 2013, le volume d'eau en m³ est de 100000.

D'où: $V_0 = 100000\ m^3$.

- De plus, chaque jour le volume total de l'eau baisse de 4% (évaporation) et diminue parallèlement de 500 m³ (libération).

Soient: • V_{n+1}, le volume d'eau en m^3 au matin du $(n+1)$-ième jour qui suit le 1^{er} juillet 2013,

• V_n, le volume d'eau en m^3 au matin du (n)-ième jour qui suit le 1^{er} juillet 2013.

Pour tout entier naturel n, le volume d'eau V_{n+1} est égal au volume d'eau V_n diminué de 4% et de 500 m^3.

Donc pour tout entier naturel n:

$V_{n+1} = (V_n - 4\%\ V_n) - (500) \iff V_{n+1} = 0,96\ V_n - 500.$

2. Recopions et complétons les lignes L_6, L_7 et L_9:

Les lignes L_6, L_7 et L_9 complétées sont les suivantes:

• L_6: Affecter à V la valeur 0, 96 x V - 500

• L_7: Affecter à N la valeur N + 1

• L_9: Sortie: Afficher N

3. a. Montrons que (U_n) est géométrique et déterminons U_0 et q:

$U_n = V_n + 12\,500 \iff U_{n+1} = V_{n+1} + 12\,500$

$\iff U_{n+1} = (0,96\ V_n - 500) + 12\,500 \quad (1).$

Or: $U_0 = V_0 + 12\,500 \Rightarrow U_0 = 112\,500$ et $V_n = U_n - 12\,500.$

Ainsi: $(1) \iff U_{n+1} = (0,96\,[U_n - 12\,500] - 500) + 12\,500$

$\Rightarrow U_{n+1} = 0,96\ U_n.$

Par conséquent, (U_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,96$ et de premier terme $U_0 = 112\,500$.

3. b. Exprimons U_n en fonction de n:

Comme $U_{n+1} = 0,96\ U_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$U_n = U_0 \times (0,96)^n, \quad \text{avec:} \quad U_0 = 112\,500.$$

3. c. Déduisons-en V_n, pour tout entier naturel n:

Nous savons que: * $U_n = 112\,500 \times (0,96)^n$

* $V_n = U_n - 12\,500.$

D'où: $V_n = 112\,500 \times (0,96)^n - 12\,500.$

4. a. Résolvons l'inéquation dans l'ensemble des entiers naturels:

$V_n \leqslant 0 \iff 112\,500 \times (0,96)^n - 12\,500 \leqslant 0$

$\iff n \ln(0,96) \leqslant \ln\left(\frac{1}{9}\right)$

$\iff n \ln(0,96) \leqslant -\ln(9)$

$\iff n \geqslant \frac{-\ln(9)}{\ln(0,96)}$ car: $0,96 \in]0, 1[$, et donc: $\ln(0,96) < 0$

$\Rightarrow n \geqslant 54$, car n est un entier naturel.

Les solutions de l'inéquation est l'ensemble des entiers naturels avec $n \geqslant 54$.

4. b. Interprétation:

Cela signifie qu'à partir du 54ème jour (1er juillet 2013 + 54 jours) au delà du 1er juillet 2013, la retenue d'eau artificielle sera vide.