EXERCICE 3

[Liban 2015]

Partie A: Les médailles circulaires

1. a. **Représentons la situation par un arbre pondéré**:

D'après l'énoncé, nous avons:

- A = " la médaille provient de M_A ".
- B = " la médaille provient de M_B ".
- D = " la médaille est défectueuse ".
- $\overline{D}$ = " la médaille n'est pas défectueuse ".

- $P(M_A) = 40\%$
- $P(M_B) = 60\%$

$(40\% + 60\% = 1)$.

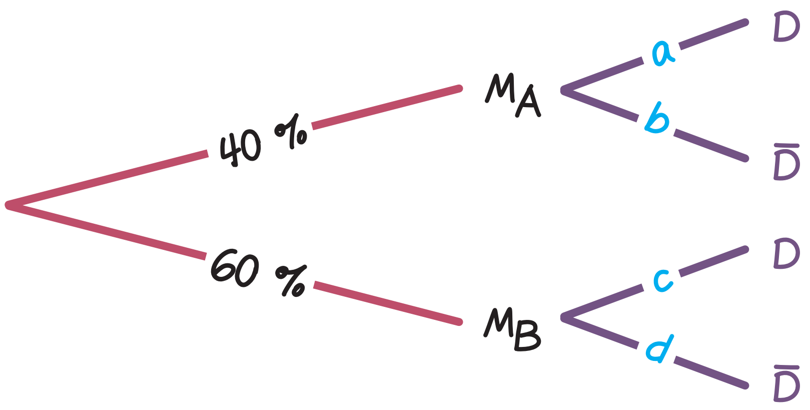
- $P_{M_A}(D) = 2\%$
- $P_{M_A}(\overline{D}) = 98\%$

$(2\% + 98\% = 1)$.

- $P_{M_B}(D) = 3\%$
- $P_{M_B}(\overline{D}) = 97\%$

$(3\% + 97\% = 1)$.

D'où l'arbre pondéré suivant:



, avec:

- $a = 2\ \%$
- $b = 98\ \%$
- $c = 3\ \%$
- $d = 97\ \%$

.

1. b. Montrons que $P(D) = 0.026$:

L'événement $D = (D \cap M_A) \cup (D \cap M_B)$.

D'où: $P(D) = P(D \cap M_A) + P(D \cap M_B)$

$$= P_{M_A}(D) \times P(M_A) + P_{M_B}(D) \times P(M_B).$$

Ainsi: $P(D) = 2\% \times 40\% + 3\% \times 60\%$ => $P(D) = 0.026$.

Au total, il y a 2.6% de chance pour que la médaille soit défectueuse.

1. c. Calculons $P_D(M_A)$:

$$P_D(M_A) = \frac{P(D \cap M_A)}{P(D)}$$

$$= \frac{P_{M_A}(D) \times P(M_A)}{P(D)}.$$

Ainsi: $P_D(M_A) = \dfrac{2\% \times 40\%}{2.6\%}$ => $P_D(M_A) \approx 30.8\%$.

Au total, il y a 30.8% de chance pour que la médaille soit produite par la machine M_A sachant qu'elle est défectueuse.

2. a. Précisons la loi que suit X ainsi que ses paramètres:

Soit l'expérience aléatoire consistant à choisir au hasard un lot de 20 médailles dans la production.

Soient les événements A = " la médaille est défectueuse ", et $\bar{A}$ = " la médaille n'est pas défectueuse ".

On désigne par X le nombre de fois où l'événement A s'est réalisé au cours des 20 épreuves.

Nous sommes en présence de 20 épreuves aléatoires indépendantes avec $\Omega = \{ A ; \bar{A} \}$ et $X(\Omega) = \{ 0, 1, 2, \ldots, 20 \}$.

En fait, on répète 20 fois un schéma de Bernoulli.

La variable aléatoire X représentant le nombre de réalisations de A suit donc une loi binômiale de paramètres: $n = 20$ et $p = 2.6\%$.

Et nous pouvons noter: $X \rightsquigarrow B(20 ; 2.6\%)$.

2. b. Calculons $P(X \leq 1)$:

$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$, avec: $X \rightsquigarrow B(20 ; 2.6\%)$.

D'où: $P(X \leq 1) = \binom{20}{0} (2.6\%)^0 (1 - 2.6\%)^{20} + \binom{20}{1} (2.6\%)^1 (1 - 2.6\%)^{19}$

$\Rightarrow \quad P(X \leq 1) \approx 90.6\%$.

(à l'aide d'une machine à calculer)

Au total, il y a 90.6% de chance pour qu'il y ait au plus 1 médaille défectueuse dans ce lot de 20 médailles.

EXERCICE 3

[Liban 2015]

Partie B: Diamètre d'une médaille

1. Indiquons par lecture graphique la valeur de μ:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X est la variable aléatoire qui, à chaque médaille, fabriquée prélevée au hasard dans la production, associe son diamètre (en millimètre).
- X suit la loi normale d'espérance $\mu = ?$ et d'écart type $\sigma = 0,25$.

La valeur de μ correspond au maximum de la courbe.

D'où: $\mu = 75$ millimètres.

2. Déterminons $P(74,4 \leqslant X \leqslant 75,6)$:

Il s'agit de calculer: $P(74,4 \leqslant X \leqslant 75,6)$.

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$P(74,4 \leqslant X \leqslant 75,6) \approx 0,984.$$

Au total, la probabilité demandée est de: $98,4\%$.

3. Déterminons la valeur de " h " avec $P(75 - h \leqslant X \leqslant 75 + h) \approx 0,95$:

Nous savons que: $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,954$.

Ici, nous avons: $P(75 - 2\sigma \leqslant X \leqslant 75 + 2\sigma) \approx 0,954.$

Par identification, nous avons: $h = 2\sigma \Rightarrow h = 0,5.$

Au total, la valeur recherchée de h est: $h = 0,5.$

Partie C: Epaisseur d'une médaille

1. Calculons la fréquence des médailles non conformes:

La fréquence des médailles dont l'épaisseur n'est pas conforme est:

$$f \approx \frac{11}{180} \Rightarrow f \approx 6,1\%.$$

2. Arrêter la production pour procéder au réglage de la machine M_B ?

Ici, nous avons:
- $n = 180$
- $p = 3\%$
- $f \approx 6,1\%.$

Dans ces conditions:

$n = 180 \geqslant 30,\ n \cdot p = 5,4 \geqslant 5$ et $n \cdot (1 - p) = 174,6 \geqslant 5.$

Les conditions sont donc réunies.

On choisit un échantillon aléatoire de 180 médailles.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% s'écrit:

$$I = \left[p - 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right].$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $I \approx [\, 0,507\% \,;\, 5,492\% \,]$.

Or, la fréquence de médailles " f " dont l'épaisseur n'est pas conforme, sur l'échantillon, est telle que:

$$f \approx 6,1\% \notin I.$$

Ainsi, il faut arrêter la production pour procéder au réglage de la machine M_B.