Corrigé

Exercice 1

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2015

MATHÉMATIQUES
- Série ES -

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures - Coefficient : 5

MATHÉMATIQUES
- Série L -

ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

Durée de l'épreuve : 3 heures - Coefficient : 4

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.

EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

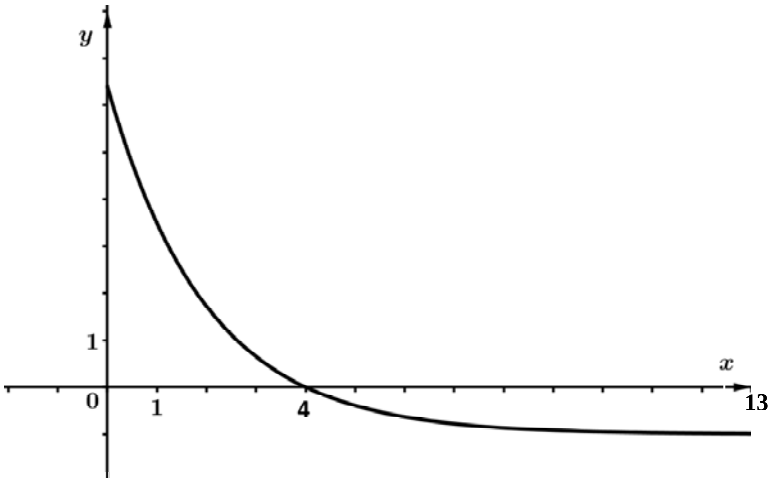
Pour chacune des propositions suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1) On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3\,;1]$.

x	-3		-1		0		1
Variations de f	-6	↗	-1	↘	-2	↗	4

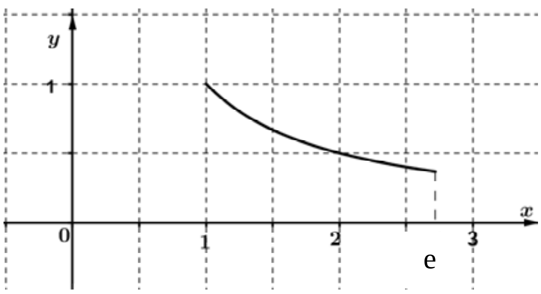
Proposition 1 : L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-3\,;1]$.

2) On considère une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 13]$ et on donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction g', fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0; 13]$.



Proposition 2 : La fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0; 4]$.
Proposition 3 : La fonction g est concave sur l'intervalle $[0; 13]$.

3) La courbe ci-dessous est la représentation graphique de la fonction h définie sur l'intervalle $[1; \mathrm{e}]$ par $h(x) = \dfrac{1}{x}$.



Proposition 4 : La fonction h est une fonction de densité de probabilité sur l'intervalle $[1; \mathrm{e}]$.

EXERCICE 1

[Liban 2015]

1. **Proposition 1**: c'est vrai.

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour justifier notre réponse.

- Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.

  Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a; b]$ tel que: $f(c) = K$.

  Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à $[a; b]$.

- Si de plus, la fonction f est strictement " croissante " ou " décroissante " sur $[a; b]$, l'équation $f(x) = K$ admet une unique solution appartenant à $[a; b]$.

Ici:
- f est continue sur $[a; b] = [-3; 1]$ et donc sur: $[0; 1]$.
- " $k = 0$ " est compris entre: $f(0) = -2$

  et: $f(1) = 4$.
- f est strictement croissante sur $[0; 1]$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $f(x) = 0$ $(k = 0)$ admet une unique solution α appartenant à $[0; 1]$.

Au total: $f(x) = 0$ admet exactement une solution unique α sur $[0; 1]$ et donc sur $[-3; 1]$.

2. a. Proposition 2: c'est faux.

En effet, sur l'intervalle $[0; 4]$: $g'(x) \geqslant 0$.

Donc sur $[0; 4]$: g est croissante.

Au total: g est croissante sur l'intervalle $[0; 4]$.

2. b. Proposition 3: c'est vrai.

En effet, sur l'intervalle $[0; 13]$: g' est décroissante.

Donc sur $[0; 13]$: $g''(x) \leqslant 0$.

Or, d'après le cours, une fonction g est concave sur un intervalle I ssi:

$$\text{pour tout } x \in I, \quad g''(x) \leqslant 0.$$

Donc: la fonction g est bien concave sur $[0; 13]$.

3. Proposition 4: c'est vrai.

En effet ici:
- la fonction h est continue sur $[1; e]$,
- $$\int_1^e h(x)\,dx = \int_1^e \frac{1}{x}\,dx$$
$$= [\ln(x)]_1^e$$
$$= 1,$$
- pour tout $x \in [1; e]$: $h(x) = \dfrac{1}{x} > 0$.

Ainsi, comme les 3 conditions sont vérifiées, nous pouvons affirmer que: la fonction h définie bien une fonction de densité de probabilité sur $[1; e]$.