Corrigé

Exercice 1

LES MATHÉMATIQUES
AU BACCALAURÉAT ES

PROBABILITÉS, BAC ES

(probas discrètes et probas à densité)

- Arbre de probabilités
- Arbre pondéré
- Probabilités conditionnelles
- Loi de Bernoulli
- Loi binomiale
- Espérance mathématique
- Loi uniforme
- Loi normale centrée réduite
- Loi normale
- Intervalle de confiance
- Intervalle de fluctuation asymptotique
- Longueur d'un intervalle

EXERCICE 1

[Inde, Pondichéry 2019]

Partie A:

1. Représentons la situation à l'aide d'un arbre pondéré:

D'après l'énoncé, nous avons:

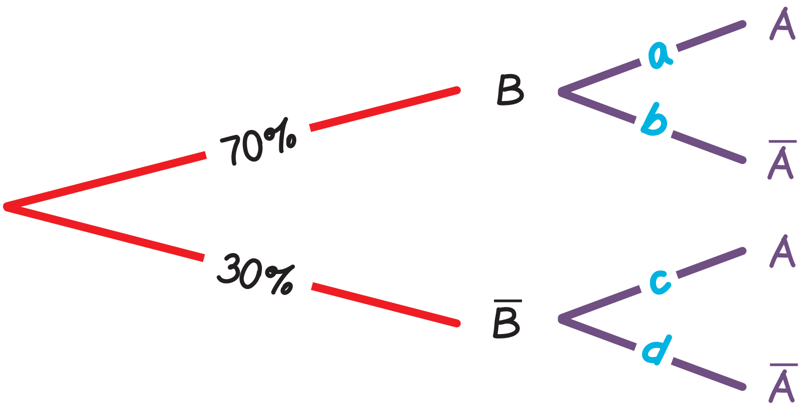
- A = " le client choisit une visite avec un audioguide ".
- $\overline{A}$ = " le client choisit une visite sans audioguide ".
- B = " le client achète son billet sur internet ".
- $\overline{B}$ = " le client achète son billet aux caisses ".

- $P(B) = 70\%$
- $P(\overline{B}) = 1 - 70\% = 30\%$.

- $P_B(A) = 35\%$
- $P_B(\overline{A}) = 1 - 35\% = 65\%$.

- $P_{\overline{B}}(A) = 55\%$
- $P_{\overline{B}}(\overline{A}) = 1 - 55\% = 45\%$.

D'où l'arbre pondéré suivant:



, avec:
- $a = 35\%$
- $b = 65\%$
- $c = 55\%$
- $d = 45\%$

2. Montrons que $P(A) = 0,41$:

Calculons donc: $P(A)$.

L'événement $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.

D'où: $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$

$= P_B(A) \times P(B) + P_{\overline{B}}(A) \times P(\overline{B})$.

Ainsi: $P(A) = 35\% \times 70\% + 55\% \times 30\%$ **cad**: $P(A) = 41\%$.

Au total, nous avons bien: $P(A) = 0,41$.

3. Déterminons ce que va décider le directeur:

Pour répondre à cette question, nous devons calculer: $P_A(B)$.

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$= \frac{P_B(A) \times P(B)}{P(A)}.$$

Ainsi: $P_A(B) = \dfrac{35\% \times 70\%}{41\%}$ **cad**: $P_A(B) \approx 59,76\%$.

Au total, comme $59,76\% > 50\%$: **oui**, le directeur proposera la location de l'audioguide sur internet.

Partie B:

1. Calculons la probabilité qu'un visiteur reste moins de 6 minutes dans la boutique :

D'après l'énoncé, nous savons que:

- T suit une loi normale d'espérance $\mu = 10$ minutes et d'écart type $\sigma = 2$ minutes.
- Y suit la loi normale centrée réduite.

Ici, nous devons calculer: $P(T \leqslant 6)$.

$$P(T \leqslant 6) = P\left(\frac{T - \mu}{\sigma} \leqslant \frac{6 - 10}{2}\right)$$

$$= P(Y \leqslant -2)$$

$$= 1 - P(Y \leqslant 2).$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$P(T \leqslant 6) \approx 1 - 0,977$ **cad**: $P(T \leqslant 6) \approx 2,3\%$.

Au total, la probabilité qu'un visiteur reste moins de 6 minutes dans la boutique est d'environ: $2,3\%$.

2. Calculons $P(6 \leqslant T \leqslant 14)$:

Il s'agit de calculer: $P(6 \leqslant T \leqslant 14)$.

Nous remarquons que: $6 = \mu - 2\sigma$ et $14 = \mu + 2\sigma$.

Or, d'après le cours: $P(\mu - 2\sigma \leqslant T \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,954$.

D'où: $P(6 \leqslant T \leqslant 14) \approx 95,4\%$.

Au total, la probabilité qu'un visiteur reste entre 6 minutes et 14 minutes dans la boutique est d'environ: $95,4\%$.

3. Déterminons la valeur du réel " a " tel que $P(T \geqslant a) = 0,25$ et interprétons:

Il s'agit de déterminer " a " sachant que: $P(T \geqslant a) = 0,25$.

$$P(T \geqslant a) = 0,25 \iff P\left(\frac{T-\mu}{\sigma} \geqslant \frac{a-10}{2}\right) = 0,25$$

$$\iff P\left(Y \geqslant \frac{a-10}{2}\right) = 0,25$$

$$\iff P\left(Y \leqslant \frac{a-10}{2}\right) = 0,75.$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$\frac{a-10}{2} \approx 0,6745 \text{ cad: } a \approx 11,35 \text{ minutes.}$$

Au total: $P(T \geqslant a) = 0,25$ quand $a \approx 11,35$ minutes.

Cela signifie que 25% des visiteurs restent plus de 11,35 minutes dans la boutique du musée.

4. Cet échantillon confirme-t-il les résultats de l'étude ?

Ici, nous avons: • $n = 720$

- $p = 25\%$
- $f = \dfrac{161}{720}$ **cad**: $f \approx 22,36\%$.

Dans ces conditions:

$n = 720 \geqslant 30$, $n \cdot p = 180 \geqslant 5$ et $n \cdot (1 - p) = 540 \geqslant 5$.

Les conditions sont donc réunies.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% s'écrit:

$$I = \left[p - 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right],$$

cad: $I = \left[25\% - 1,96 \times \sqrt{\dfrac{25\% \times 75\%}{720}} ; 25\% + 1,96 \times \sqrt{\dfrac{25\% \times 75\%}{720}} \right]$.

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $I \approx [\,21,8\% ; 28,2\%\,]$.

Or, la fréquence " f ", sur l'échantillon, est telle que: $f \approx 22,36\% \in I$.

Ainsi, **oui** cet échantillon confirme bien les résultats de l'étude.