Sujet Spécialité

MATHÉMATIQUES

INDE

BAC ES - 2018

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2018

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SUJET

ÉPREUVE DU VENDREDI 4 MAI 2018

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 7

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 9 pages, y compris celle-ci.

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des questions posées, une seule des trois réponses est exacte. Recopier le numéro de la question et la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Une réponse multiple ne rapporte aucun point.

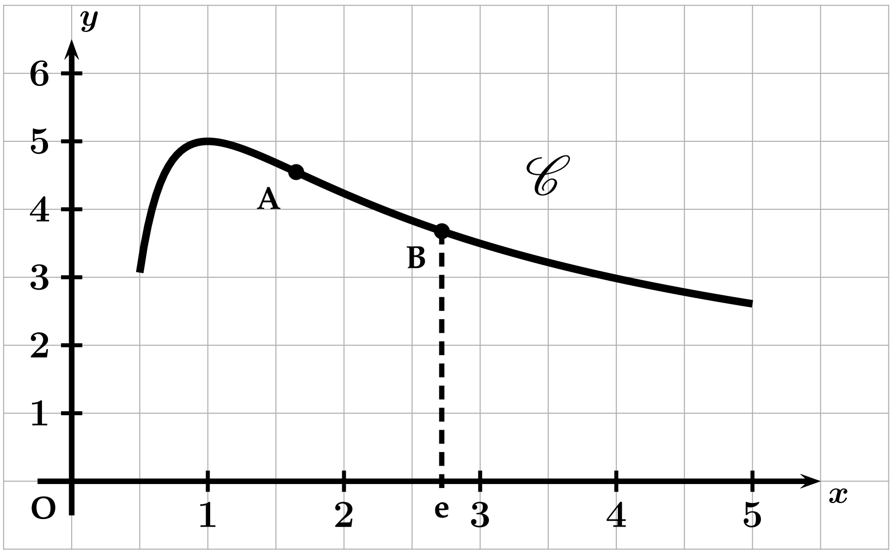
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0,5\,;5]$ par :

$$f(x) = \frac{5 + 5\ln x}{x}$$

Sa représentation graphique est la courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous dans un repère d'origine O. On admet que le point A placé sur le graphique est le seul point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[0,5\,;5]$. On note B le point de cette courbe d'abscisse e.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur cet intervalle.

On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f et f'' sa fonction dérivée seconde.



On admet que pour tout x de l'intervalle $[0,5\,;5]$ on a :

$$f'(x) = \frac{-5\ln x}{x^2} \qquad\qquad f''(x) = \frac{10\ln x - 5}{x^3}$$

1. La fonction f' est :

- **(a)** positive ou nulle sur l'intervalle $[0,5\,;5]$
- **(b)** négative ou nulle sur l'intervalle $[1\,;5]$
- **(c)** négative ou nulle sur l'intervalle $[0,5\,;1]$

2. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B est égal à :

(a) $-\dfrac{5}{e^2}$ **(b)** $\dfrac{10}{e}$ **(c)** $\dfrac{5}{e^3}$

3. La fonction f' est :

(a) croissante sur l'intervalle $[0,5\,;1]$

(b) décroissante sur l'intervalle $[1\,;5]$

(c) croissante sur l'intervalle $[2\,;5]$

4. La valeur exacte de l'abscisse du point A de la courbe $\mathscr{C}$ est égale à :

(a) $1,65$ **(b)** $1,6$ **(c)** $e^{0,5}$

5. On note $\mathscr{A}$ l'aire, mesurée en unités d'aire, du domaine plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 4$. Cette aire vérifie :

(a) $20 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 30$ **(b)** $10 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 15$ **(c)** $5 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 8$

EXERCICE 2 (5 points)

Les différentes parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.
Les résultats numériques seront donnés, si nécessaire, sous forme approchée à $0,01$ près.

Partie A

Un commerçant dispose dans sa boutique d'un terminal qui permet à ses clients, s'ils souhaitent régler leurs achats par carte bancaire, d'utiliser celle-ci en mode sans contact (quand le montant de la transaction est inférieur ou égal à 30 €) ou bien en mode code secret (quel que soit le montant de la transaction).

Il remarque que :

- 80 % de ses clients règlent des sommes inférieures ou égales à 30 €. Parmi eux :
  - 40 % paient en espèces ;
  - 40 % paient avec une carte bancaire en mode sans contact ;
  - les autres paient avec une carte bancaire en mode code secret.
- 20 % de ses clients règlent des sommes strictement supérieures à 30 €. Parmi eux :
  - 70 % paient avec une carte bancaire en mode code secret ;
  - les autres paient en espèces.

On interroge au hasard un client qui vient de régler un achat dans la boutique.
On considère les évènements suivants :

- V : « pour son achat, le client a réglé un montant inférieur ou égal à 30 € » ;
- E : « pour son achat, le client a réglé en espèces » ;
- C : « pour son achat, le client a réglé avec sa carte bancaire en mode code secret » ;
- S : « pour son achat, le client a réglé avec sa carte bancaire en mode sans contact ».

1. **a)** Donner la probabilité de l'évènement V, notée $P(V)$, ainsi que la probabilité de S sachant V notée $P_V(S)$.

b) Traduire la situation de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2. **a)** Calculer la probabilité que pour son achat, le client ait réglé un montant inférieur ou égal à 30 € et qu'il ait utilisé sa carte bancaire en mode sans contact.

b) Montrer que la probabilité de l'évènement : « pour son achat, le client a réglé avec sa carte bancaire en utilisant l'un des deux modes » est égale à $0,62$.

Partie B

On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur la dépense en euros d'un client suite à un achat chez ce commerçant.
On admet que X suit la loi normale de moyenne $27,5$ et d'écart-type 3.
On interroge au hasard un client qui vient d'effectuer un achat dans la boutique.

1. Calculer la probabilité que ce client ait dépensé moins de 30 €.

2. Calculer la probabilité que ce client ait dépensé entre $24,5$ € et $30,5$ €.

Partie C

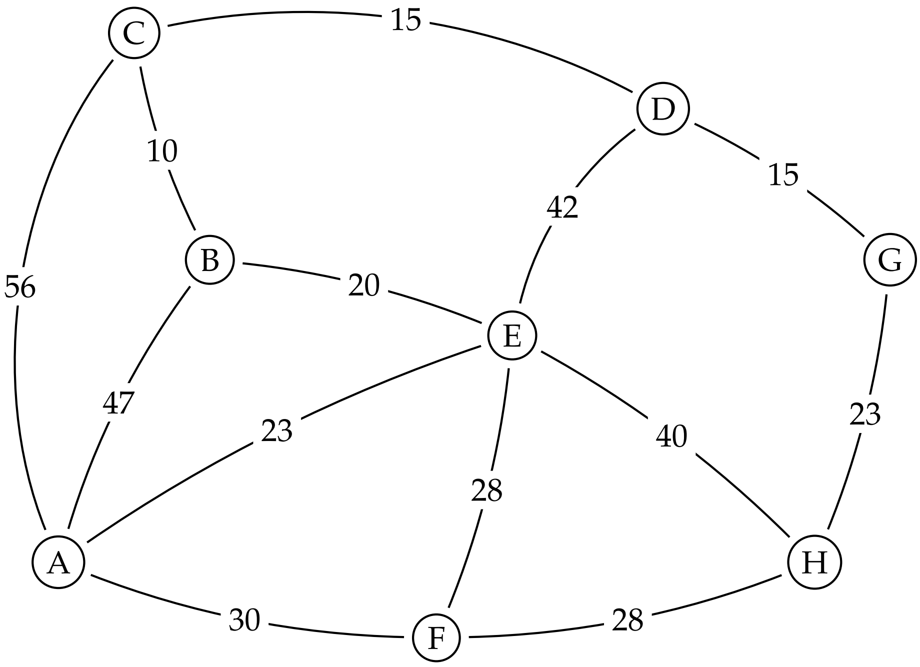
Une enquête de satisfaction a été réalisée auprès d'un échantillon de 200 clients de cette boutique.
Parmi eux, 175 trouvent que le dispositif sans contact du terminal est pratique.
Déterminer, avec un niveau de confiance de $0,95$, l'intervalle de confiance de la proportion p de clients qui trouvent que le dispositif sans contact est pratique.

EXERCICE 3 (5 points)

Les différentes parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Le graphe pondéré ci-dessous représente les différents lieux A, B, C, D, E, F, G et H dans lesquels Louis est susceptible de se rendre chaque jour. Le lieu A désigne son domicile et G le lieu de son site de travail. Le poids de chaque arête représente la distance, en kilomètres, entre les deux lieux reliés par l'arête.



Déterminer le chemin le plus court qui permet à Louis de relier son domicile à son travail. On pourra utiliser un algorithme. Préciser la distance, en kilomètres, de ce chemin.

Partie B

Afin de réduire son empreinte énergétique, Louis décide d'utiliser lors de ses trajets quotidiens soit les transports en commun, soit le covoiturage.

- s'il a utilisé les transports en commun lors d'un trajet, il utilisera le covoiturage lors de son prochain déplacement avec une probabilité de $0,53$;
- s'il a utilisé le covoiturage lors d'un trajet, il effectuera le prochain déplacement en transport en commun avec une probabilité de $0,78$.

Louis décide de mettre en place ces résolutions au 1er janvier 2018.

Pour tout entier naturel n, on note :

- c_n la probabilité que Louis utilise le covoiturage n jour(s) après le 1er janvier 2018 ;
- t_n la probabilité que Louis utilise les transports en commun n jour(s) après le 1er janvier 2018 ;

La matrice ligne $P_n = \begin{pmatrix} c_n & t_n \end{pmatrix}$ traduit l'état probabiliste n jour(s) après le 1er janvier 2018.

Le 1er janvier 2018, Louis décide d'utiliser le covoiturage.

1. **a)** Préciser l'état probabiliste initial P_0.

b) Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste.

On notera « C » et « T » ses deux sommets :

- « C » pour indiquer que Louis utilise le covoiturage ;
- « T » pour indiquer que Louis utilise les transports en commun.

2. Déterminer la matrice de transition du graphe probabiliste en considérant ses sommets dans l'ordre alphabétique.

3. Calculer l'état probabiliste P_2 et interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.

4. Soit la matrice ligne $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ associée à l'état stable du graphe probabiliste.

a) Calculer les valeurs exactes de x et de y puis en donner une valeur approchée à $0,01$ près.

b) Selon ce modèle, peut-on dire qu'à long terme, Louis utilisera aussi souvent le covoiturage que les transports en commun ? Justifier la réponse.

EXERCICE 4 (5 points)

Dans cet exercice, si nécessaire, les valeurs numériques approchées seront données à $0,01$ près.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;4]$ par :

$$f(x) = (3,6\,x + 2,4)\,\mathrm{e}^{-0,6x} - 1,4$$

Partie A

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;4]$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Justifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;4]$ on a :

$$f'(x) = (-2,16\,x + 2,16)\,\mathrm{e}^{-0,6x}$$

2. **a)** Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;4]$.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur cet intervalle.
On donnera les valeurs numériques qui apparaissent dans le tableau de variation sous forme approchée.

3. On admet que la fonction F définie par :

$$F(x) = (-6x - 14)\,\mathrm{e}^{-0,6x} - 1,4x$$

est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;4]$.
Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ puis en donner une valeur numérique approchée.

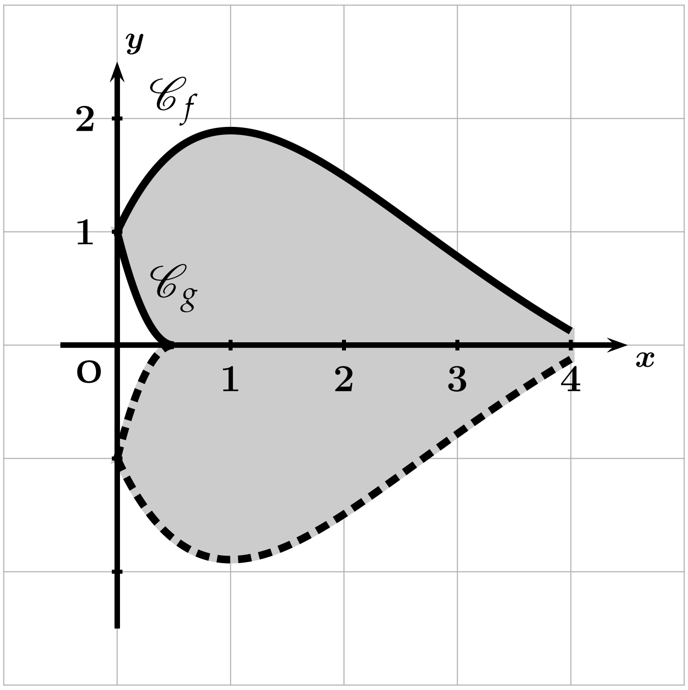
Partie B

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;4]$.
On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = 4x^2 - 4x + 1$$

On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de cette fonction sur l'intervalle $[0\,;0,5]$.

On a tracé ci-dessous les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans un repère d'origine O et, en pointillés, les courbes obtenues par symétrie de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ par rapport à l'axe des abscisses :



1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{0,5} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}$.

2. On considère le domaine plan délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$, leurs courbes symétriques (en pointillés) ainsi que la droite d'équation $x = 4$.

Ce domaine apparaît grisé sur la figure ci-dessus.

Calculer une valeur approchée de l'aire, en unités d'aire, de ce domaine.