Corrigé

Exercice 1

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2018

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SUJET

ÉPREUVE DU VENDREDI 4 MAI 2018

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 7

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 9 pages, y compris celle-ci.

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des questions posées, une seule des trois réponses est exacte. Recopier le numéro de la question et la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Une réponse multiple ne rapporte aucun point.

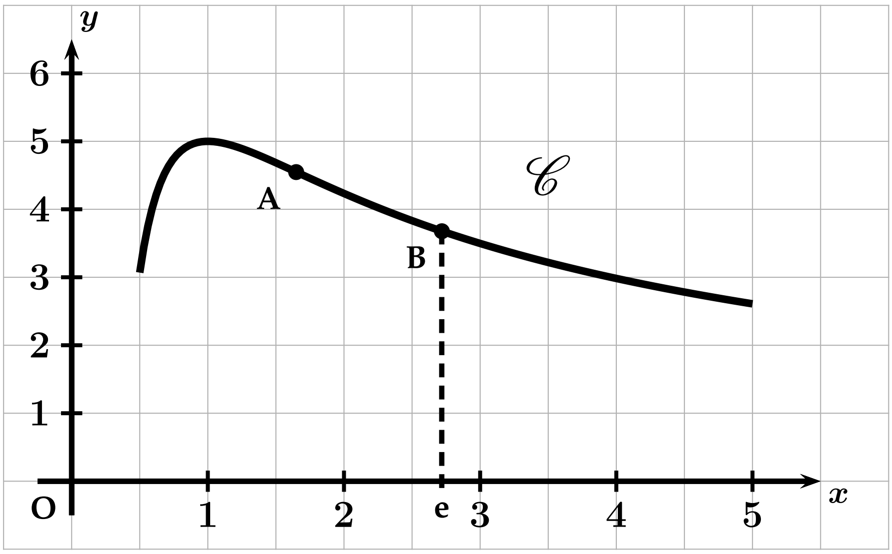
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0,5\,;5]$ par :

$$f(x) = \frac{5 + 5\ln x}{x}$$

Sa représentation graphique est la courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous dans un repère d'origine O. On admet que le point A placé sur le graphique est le seul point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[0,5\,;5]$. On note B le point de cette courbe d'abscisse e.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur cet intervalle.

On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f et f'' sa fonction dérivée seconde.



On admet que pour tout x de l'intervalle $[0,5\,;5]$ on a :

$$f'(x) = \frac{-5\ln x}{x^2} \qquad\qquad f''(x) = \frac{10\ln x - 5}{x^3}$$

1. La fonction f' est :

- **(a)** positive ou nulle sur l'intervalle $[0,5\,;5]$
- **(b)** négative ou nulle sur l'intervalle $[1\,;5]$
- **(c)** négative ou nulle sur l'intervalle $[0,5\,;1]$

2. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B est égal à :

(a) $-\dfrac{5}{e^2}$ **(b)** $\dfrac{10}{e}$ **(c)** $\dfrac{5}{e^3}$

3. La fonction f' est :

(a) croissante sur l'intervalle $[0,5\,;1]$

(b) décroissante sur l'intervalle $[1\,;5]$

(c) croissante sur l'intervalle $[2\,;5]$

4. La valeur exacte de l'abscisse du point A de la courbe $\mathscr{C}$ est égale à :

(a) $1,65$ **(b)** $1,6$ **(c)** $e^{0,5}$

5. On note $\mathscr{A}$ l'aire, mesurée en unités d'aire, du domaine plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 4$. Cette aire vérifie :

(a) $20 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 30$ **(b)** $10 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 15$ **(c)** $5 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 8$

EXERCICE 1

[Inde, Pondichéry 2018]

1. La bonne réponse est: B.

En effet: $f'(x) \leqslant 0 \iff \dfrac{-5 \ln x}{x^2} \leqslant 0$

$\iff -5 \ln x \leqslant 0$, car sur $[0,5 ; 5]$: $x^2 \neq 0$

$\iff \ln x \geqslant 0$

$\iff x \geqslant e^0$ cad: $x \geqslant 1$ ou: $x \in [1 ; 5]$.

Ainsi: f' est négative ou nulle sur l'intervalle $[1 ; 5]$.

2. La bonne réponse est: A.

En effet, le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point B est: $f'(e)$, car: $B(e ; f(e))$.

Or: $f'(e) = \dfrac{-5 \ln(e)}{e^2}$ cad: $f'(e) = \dfrac{-5}{e^2}$.

Ainsi, le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point B est:

$$f'(e) = \frac{-5}{e^2}.$$

3. La bonne réponse est: C.

En effet, pour connaître le sens de variation de la fonction f', nous devons déterminer le signe de la fonction f''.

Or: $f''(x) \geqslant 0 \iff \dfrac{10 \ln x - 5}{x^3} \geqslant 0$

$\iff 10 \ln x - 5 \geqslant 0$, car sur $[0,5 ; 5]$: $x^2 \neq 0$

$\iff \ln x \geqslant \dfrac{1}{2}$

$\iff x \geqslant e^{\frac{1}{2}}$ cad: $x \in [e^{\frac{1}{2}} ; 5]$.

Or: $[2 ; 5]$ est un intervalle inclus dans $[e^{\frac{1}{2}} ; 5]$.

Par conséquent: la fonction f' est croissante sur $[2 ; 5]$.

4. La bonne réponse est: C.

En effet, comme le point $A(x_A ; f(x_A))$ est un point d'inflexion: $f''(x_A) = 0$.

Or: $f''(x_A) = 0 \iff \dfrac{10 \ln(x_A) - 5}{(x_A)^3} = 0$

$\iff 10 \ln(x_A) - 5 = 0$, car sur $[0,5 ; 5]$: $(x_A)^3 \neq 0$

$\iff \ln(x_A) = \dfrac{1}{2}$

$\iff x_A = e^{\frac{1}{2}}$ et donc: $A(e^{\frac{1}{2}} ; f(e^{\frac{1}{2}}))$.

Ainsi, la valeur exacte de l'abscisse du point A est: $x_A = e^{\frac{1}{2}}$.

5. La bonne réponse est: A.

En effet, en comptant le nombre de carreaux contenu dans l'aire $\mathcal{A}$, domaine du plan délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 4$, nous obtenons: plus de 23 carreaux.

Or : une unité d'aire correspond à deux carreaux.

Donc nous devons diviser par 2.

Ainsi, un seul encadrement possible : $10 \leqslant \mathcal{A} \leqslant 15$.