Corrigé

Exercice 3

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2018

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 5

MATHÉMATIQUES – Série L

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 4

SUJET

ÉPREUVE DU VENDREDI 4 MAI 2018

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 9 pages, y compris celle-ci.

EXERCICE 3 (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 65$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,8\,u_n + 18$$

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n - 90$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $0,8$.
On précisera la valeur de v_0.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 90 - 25 \times 0,8^n$$

3. On considère l'algorithme ci-dessous :

ligne 1	$u \longleftarrow 65$
ligne 2	$n \longleftarrow 0$
ligne 3	Tant que ....
ligne 4	$\quad n \longleftarrow n+1$
ligne 5	$\quad u \longleftarrow 0,8 \times u + 18$
ligne 6	Fin Tant que

a) Recopier et compléter la ligne 3 de cet algorithme afin qu'il détermine le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 85$.

b) Quelle est la valeur de la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

c) Retrouver par le calcul le résultat de la question précédente en résolvant l'inéquation $u_n \geqslant 85$.

4. La société Biocagette propose la livraison hebdomadaire d'un panier bio qui contient des fruits et des légumes de saison issus de l'agriculture biologique. Les clients ont la possibilité de souscrire un abonnement de 52 € par mois qui permet de recevoir chaque semaine ce panier bio.
En juillet 2017, 65 particuliers ont souscrit cet abonnement.

Les responsables de la société Biocagette font les hypothèses suivantes :

- d'un mois à l'autre, environ 20 % des abonnements sont résiliés ;
- chaque mois, 18 particuliers supplémentaires souscrivent à l'abonnement.

a) Justifier que la suite (u_n) permet de modéliser le nombre d'abonnés au panier bio le n-ième mois qui suit le mois de juillet 2017.

b) Selon ce modèle, la recette mensuelle de la société Biocagette va-t-elle dépasser 4 420 € durant l'année 2018 ? Justifier la réponse.

c) Selon ce modèle, vers quelle valeur tend la recette mensuelle de la société Biocagette ? Argumenter la réponse.

EXERCICE 3

[Inde, Pondichéry 2018]

1. Calculons U_1 et U_2:

Il s'agit de calculer U_1 et U_2.

- $U_1 = 0,8\ U_0 + 18 \iff U_1 = 0,8 \times 65 + 18 \Rightarrow U_1 = 70$.
- $U_2 = 0,8\ U_1 + 18 \iff U_2 = 0,8 \times 70 + 18 \Rightarrow U_2 = 74$.

Ainsi, les valeurs respectives de U_1 et U_2 sont: $U_1 = 70$ et $U_2 = 74$.

2. a. Montrons que (V_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme V_0 que l'on précisera:

$V_n = U_n - 90 \iff V_{n+1} = U_{n+1} - 90$

$\iff V_{n+1} = (0,8\,U_n + 18) - 90 \quad (1)$.

Or: $V_0 = U_0 - 90 \Rightarrow V_0 = 65 - 90 = -25$ et $U_n = V_n + 90$.

Ainsi: $(1) \iff V_{n+1} = (0,8\,[V_n + 90] + 18) - 90$

$\Rightarrow V_{n+1} = 0,8\,V_n$.

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $V_0 = -25$.

2. b. Démontrons que, pour tout entier naturel n, $U_n = 90 - 25 \times 0,8^n$:

Nous savons que: * $V_n = -25 \times (0,8)^n$ (d'après le cours)

$* \; U_n = V_n + 90.$

D'où: $U_n = -25 \times (0,8)^n + 90$ ou: $U_n = 90 - 25 \times (0,8)^n$.

3. a. Recopions et complétons l'algorithme pour atteindre l'objectif demandé:

L'algorithme recopié et complété est le suivant:

```
u ← 65
n ← 0
Tant que u < 85
    | n ← n + 1
    | u ← 0,8 x u + 18
Fin Tant que
```

3. b. Déterminons la valeur de la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme:

Pour répondre à cette question, nous allons dresser un tableau:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
U_n	65	70	74	77,2	79,8	81,8	83,4	84,8	85,8

Nous nous arrêtons quand $n = 8$ car c'est à partir de cette valeur entière-là que $U_n \geqslant 85$.

3. c. Résolvons l'inéquation $U_n \geqslant 85$:

$U_n \geqslant 85 \iff 90 - 25 \times (0,8)^n \geqslant 85$

$\Longleftrightarrow \; 25 \times (0,8)^n \leqslant 5$

$\Longleftrightarrow \; (0,8)^n \leqslant \frac{1}{5}$

$\Longleftrightarrow \; n \cdot \ln(0,8) \leqslant \ln\left(\frac{1}{5}\right)$

$\Longleftrightarrow \; n \geqslant \frac{-\ln(5)}{\ln(0,8)}$, car: $0,8 \in \,]0\,;1[$, et donc: $\ln(0,8) < 0$

$\Longrightarrow \; n \geqslant 8$, car n est un entier naturel.

En conclusion: nous retrouvons bien par le calcul le résultat de la question précédente **3. b.**

4. a. Justifions que la suite (U_n) permet cette modélisation:

- D'après l'énoncé, 65 particuliers ont souscrit cet abonnement en juillet 2017.

D'où: $U_0 = 65$ particuliers.

- De plus, chaque mois, les souscriptions évoluent comme suit:
  - d'un mois à l'autre, environ 20% des abonnements sont résiliés,
  - et, 18 particuliers supplémentaires souscrivent à l'abonnement.

Soient:
- U_{n+1}, le nombre d'abonnés au panier bio le $(n+1)$ième mois qui suit juillet 2017,
- U_n, le nombre d'abonnés au panier bio le (n)ième mois qui suit juillet 2017.

Pour tout entier naturel n, le nombre d'abonnés le (n+1)ième mois qui suit juillet 2017 est égal à celui U_n diminué de 20% et augmenté de 18 abonnements.

Pour tout entier naturel n:

$$U_{n+1} = U_n - 20\% U_n + 18 \Rightarrow U_{n+1} = 0,8 U_n + 18.$$

Au total, nous avons bien: $U_{n+1} = 0,8 U_n + 18$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Et donc: **la suite (U_n) permet bien la modélisation du nombre d'abonnés au panier bio le n-ième mois qui suit juillet 2017.**

4. b. La recette mensuelle va-t-elle dépasser 4 420 € en 2018:

La recette mensuelle U_n, le mois " **n** ", nous est donnée par la formule:

R = prix d'un abonnement x nombre d'abonnés cad ici: R = 52 € x U_n.

La question est de savoir à partir de quel mois " **n** ": **R > 4 420 €** ?

$$\mathbf{R > 4\,420\,€} \iff 52 \times (90 - 25 \times (0,8)^n) > 4\,420$$

$$\iff n \cdot \ln(0,8) < \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow n \geq 8, \text{ d'après la question } \mathbf{3.\ c.}$$

En conclusion: **oui**, 8 mois après juillet 2017, soit à partir du mois de **mars 2018**, la société aura une recette mensuelle supérieure à 4 420 €.

4. c. Vers quelle valeur tend la recette mensuelle de la société ?

En $+\infty$, comme $(0,8)^n$ tend vers 0: la recette mensuelle de la société tendra vers 52 € x 90 = 4680 euros.