# Corrigé

# Exercice 4

freemaths.fr

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

## SESSION 2017

---

# MATHÉMATIQUES - Série ES
## ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

**Durée de l'épreuve : 3 heures** **Coefficient : 7**

---

**Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.**

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

**Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 8 pages numérotées de 1/8 à 8/8 .**

## EXERCICE 4 (6 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

### Partie A

Dans cette partie, les réponses seront données sans justification, avec la précision permise par le graphique situé en annexe en page 8/8.
Celui-ci présente dans un repère d'origine O la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction $f$ définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;7]$.

1. Encadrer par deux entiers consécutifs chacune des solutions de l'équation $f(x) = 10$ sur l'intervalle $[0\,;7]$.

2. Donner le maximum de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\,;7]$ et préciser la valeur en laquelle il est atteint.

3. La valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ appartient à un seul des intervalles suivants. Lequel ?

   (a) $[9\,;17]$ (b) $[18\,;26]$ (c) $[27\,;35]$

### Partie B

La courbe donnée en annexe page 8/8 est la représentation graphique de la fonction $f$ définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;7]$ d'expression :

$$f(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x+3}$$

On rappelle que $f'$ désigne la fonction dérivée de la fonction $f$.

1. Montrer que pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0\,;7]$, $f'(x) = (-2x+2)\,\mathrm{e}^{-x+3}$.

2. **a)** Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;7]$ puis en déduire le tableau de variation de la fonction $f$ sur ce même intervalle.

   **b)** Calculer le maximum de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\,;7]$.

3. **a)** Justifier que l'équation $f(x) = 10$ admet deux solutions sur l'intervalle $[0\,;7]$ que l'on notera $\alpha$ et $\beta$ avec $\alpha < \beta$.

**b)** On admet que $\alpha \simeq 0,36$ à $10^{-2}$ près.

Donner une valeur approchée de $\beta$ à $10^{-2}$ près.

**4**. On considère la fonction $F$ définie sur l'intervalle $[0\,;7]$ par :

$$F(x) = (-2x-2)\,\mathrm{e}^{-x+3}$$

**a)** Justifier que $F$ est une primitive de $f$ sur l'intervalle $[0\,;7]$.

**b)** Calculer la valeur exacte de l'aire, en unités d'aire, du domaine plan délimité par les droites d'équation $x = 1$, $x = 3$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$.

**5**. La fonction $f$ étudiée modélise le bénéfice d'une entreprise, en milliers d'euros, réalisé pour la vente de $x$ centaines d'objets ($x$ compris entre 0 et 7).

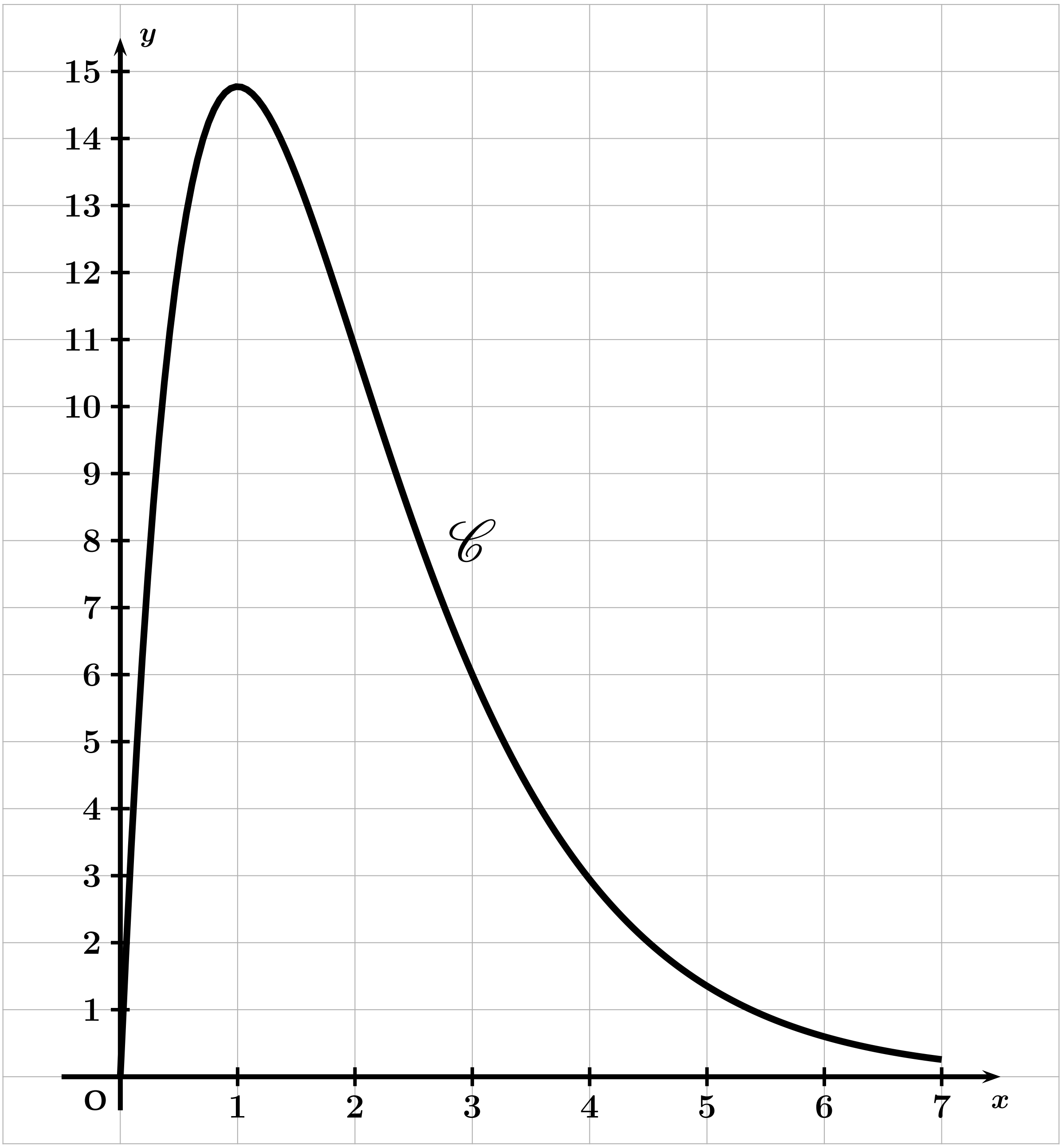
**a)** Calculer la valeur moyenne du bénéfice, à l'euro près, lorsque l'entreprise vend entre 100 et 300 objets.

**b)** L'entreprise souhaite que son bénéfice soit supérieur à 10 000 euros.

Déterminer le nombre d'objets possibles que l'entreprise devra vendre pour atteindre son objectif.

**ANNEXE**

**N'est pas à rendre avec la copie**



# EXERCICE 4

## [ Inde, Pondichéry 2017 ]

### Partie A:

**1. Encadrons chacune des solutions de l'équation $f(x) = 10$ sur l'intervalle $[0; 7]$:**

L'équation $f(x) = 10$ admet deux solutions sur l'intervalle $[0; 7]$.

Soient $x_1$ et $x_2$ ces deux solutions.

Les deux encadrements (par 2 entiers consécutifs) des solutions $x_1$ et $x_2$ sont respectivement: $[0; 1]$ et $[2; 3]$.

**2. Donnons le maximum de $f$ sur l'intervalle $[0; 7]$ en précisant la valeur en laquelle il est atteint:**

La fonction $f$ atteint son maximum quand: $x = 1$.

Quand $x = 1$: $f(1) \approx 14,8$.

Au total: $f$ est maximum quand $x = 1$ et en ce point $f_{max} \approx 14,8$.

**3. Déterminons à quel intervalle appartient l'intégrale:**

Ici: $I = \int_1^3 f(x)\,dx$.

En unités d'aire et à l'unité près, l'aire $\mathcal{A} = I$ du domaine compris entre la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$, est telle que: $18 < \mathcal{A} < 26$ (plus de 23 carreaux et moins de 26 carreaux, en comptant).

Au total, nous retiendrons l'intervalle: $[\,18\,;\,26\,]$.

## Partie B:

### 1. Déterminons $f'$ pour tout réel $x$ de l'intervalle $[\,0\,;\,7\,]$:

Ici: • $f(x) = 2x\,e^{-x+3}$ **(u x v)**

• $Df = [\,0\,;\,7\,]$

• $f$ est définie et dérivable sur l'intervalle $[\,0\,;\,7\,]$.

Comme $f$ est dérivable sur $[\,0\,;\,7\,]$, nous pouvons calculer $f'$:

Pour tout $x \in [\,0\,;\,7\,]$: $f'(x) = 2 \times e^{-x+3} + 2x \times (-e^{-x+3})$ **(u' x v + u x v')**

$\Rightarrow$ $f'(x) = e^{-x+3} \times (-2x + 2)$.

Au total, pour tout $x \in [\,0\,;\,7\,]$: $f'(x) = (-2x + 2) \times e^{-x+3}$.

### 2. a. Étudions le signe de $f'$ sur $[\,0\,;\,7\,]$ et dressons le tableau de variation de $f$:

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $x \in [\,0\,;\,7\,]$:

• **1er cas**: $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0$ ssi $(-2x + 2) \times e^{-x+3} = 0$

$\Leftrightarrow$ $-2x + 2 = 0^*$, cad: $x = 1$.

• **2ème cas**: $f'(x) < 0$.

$f'(x) < 0$ ssi $(-2x + 2) \times e^{-x+3} < 0$

$\Leftrightarrow$ $-2x + 2 < 0^*$, cad: $x > 1$ ou $x \in ]\,1\,;\,7\,]$.

• **$3^{ème}$ cas**: $f'(x) > 0$.

$f'(x) > 0$ ssi $(-2x + 2) \times e^{-x+3} > 0$

$\iff -2x + 2 > 0^{*}$, cad: $x < 1$ ou $x \in [0; 1[$.

($*$: car pour tout $x \in [0; 7]$, $e^{-x+3} > 0$)

Au total: • $f$ est croissante sur $[0; 1]$,

(car sur $[0; 1]$, $f'(x) \geqslant 0$)

• $f$ est décroissante sur $[1; 7]$.

(car sur $[1; 7]$, $f'(x) \leqslant 0$)

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation suivant:

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $7$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $a$ | $\nearrow$ | $b$ | $\searrow$ | $c$ |

Avec: • $a = f(0) \Rightarrow a = 0$,

• $b = f(1) \Rightarrow b = 2e^{2}$ $(\approx 14,78)$,

• $c = f(7) \Rightarrow c = 14e^{-4}$ $(\approx 0,26)$.

**2. b. Calculons le maximum de $f$ sur l'intervalle $[0; 7]$:**

Le maximum de $f$ sur $[0; 7]$ est atteint quand $f'(x) = 0$.

Or: $f'(x) = 0$ quand $x = 1$.

Ainsi: le point $A(1; 2e^{2})$ est le maximum de $f$ sur $[0; 7]$.

**3. a. Justifions que l'équation $f(x) = 10$ admet deux solutions $\alpha$ et $\beta$ sur l'intervalle $[0; 7]$:**

Pour cela, nous allons dresser un nouveau tableau de variation:

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $1$ | | $\beta$ | | $7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | | | $0$ | | | $-$ | |
| $f$ | $a$ ↗ | | $f(\alpha)$ ↗ | | $b$ | | ↘ $f(\beta)$ | | ↘ $c$ |

Avec: • $a = 0$,

• $b \approx 14,78$,

• $c \approx 0,26$,

• $f(\alpha) = f(\beta) = 10$.

Le nouveau tableau de variation nous montre qu'il existe bien deux solutions $\alpha$ et $\beta$ telles que: $f(\alpha) = f(\beta) = 10$.

Au total $\alpha$ et $\beta$ existent bien avec: $\alpha \in [0; 1]$ et $\beta \in [1; 7]$.

**3. b. Donnons une valeur approchée de $\beta$ sachant que $\alpha \approx 0,36$ à $10^{-2}$ près:**

Par tâtonnement, nous trouvons: $\beta \approx 2,16$ à $10^{-2}$ près.

Au total, à $10^{-2}$ près: $\alpha \approx 0,36 \in [0; 1]$ et $\beta \approx 2,16 \in [1; 7]$.

**4. a. Justifions que F est une primitive de $f$ sur $[0; 7]$:**

Sur l'intervalle $[0; 7]$, F est une primitive de $f$ ssi: $F'(x) = f(x)$.

Ici: $F(x) = (-2x - 2)\, e^{-x+3}$ **(u x v)**.

D'où: $F'(x) = -2 \times e^{-x+3} + (-2x - 2) \times (-e^{-x+3})$ **$(u' \times v + u \times v')$**

$\Rightarrow F'(x) = 2x \times e^{-x+3}$.

Au total: F est bien une primitive de $f$ car $F'(x) = f(x)$.

**4. b. Calculons l'aire demandée:**

Ici, il s'agit de calculer: $\mathscr{A} = \int_1^3 f(x)\, dx$.

Nous avons: $\mathscr{A} = [F(x)]_1^3$

$\Rightarrow \mathscr{A} = -8 + 4e^2$ u a ou $\mathscr{A} \approx 21,55$ u a

Au total, la valeur exacte de l'aire demandée est: $\mathscr{A} = -8 + 4e^2$ u a

**5. a. Calculons la valeur moyenne du bénéfice:**

Soit " m ", la valeur moyenne de $f$ sur $[1 ; 3]$.

m est telle que: $m = \dfrac{1}{3-1} \int_1^3 f(x)\, dx$.

Or: $\int_1^3 f(x)\, dx = \mathscr{A}$.

D'où la valeur moyenne du bénéfice est: $\dfrac{1}{3-1} \times \mathscr{A} \times 1000$ €.

Au total, la valeur moyenne du bénéfice, à l'euro près est: $m = 10\,778$ €.

**5. b. Déterminons le nombre d'objets que l'entreprise devra vendre:**

Pour atteindre l'objectif fixé, le nombre d'objets que doit vendre l'entreprise devra être compris entre $\alpha$ et $\beta$.

Ainsi, le nombre d'objets doit être compris entre: 36 et 216.