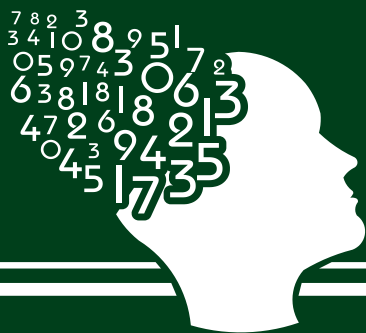


Corrigé

Exercice 3



freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES - Série ES ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

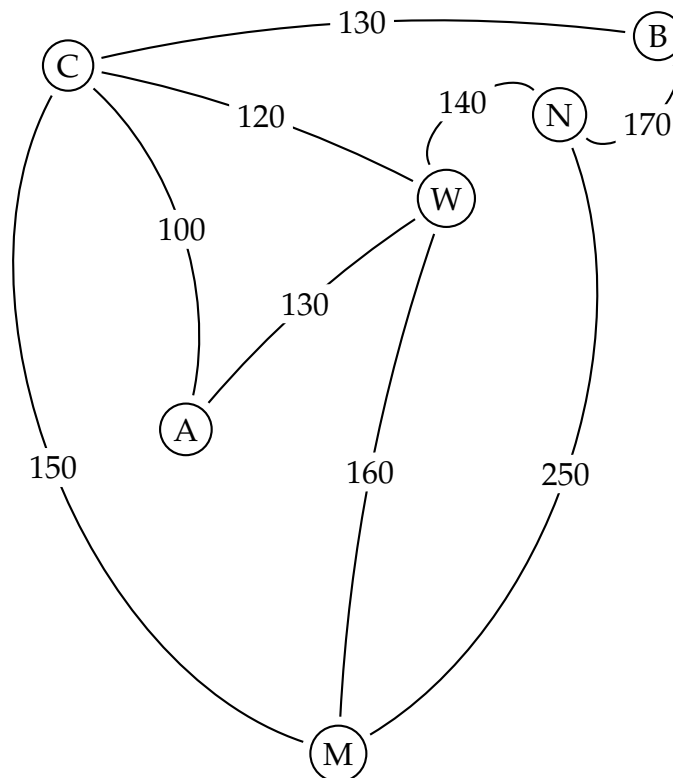
Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 8 pages
numérotées de 1/8 à 8/8 .

EXERCICE 3 (5 points)

Alexis part en voyage dans l'Est des États-Unis. Il souhaite visiter les villes suivantes :

Atlanta (A), Boston (B), Chicago (C), Miami (M), New York (N) et Washington (W).

Une compagnie aérienne propose les liaisons suivantes représentées par le graphe ci-dessous :



Les nombres présents sur chacune des branches indiquent le tarif, en dollars, du vol en avion.

- Quelles caractéristiques du graphe permettent d'affirmer qu'il existe un trajet qui permette à Alexis d'emprunter chaque liaison aérienne une et une seule fois ?
 - Donner un exemple d'un tel trajet.
- Alexis veut relier Boston à Miami.
En utilisant un algorithme, déterminer le trajet le moins cher ainsi que le coût de ce trajet.
- Donner la matrice d'adjacence P de ce graphe en classant les sommets par ordre alphabétique.
 - Alexis souhaite aller d'Atlanta à Boston en utilisant au maximum trois liaisons aériennes. Combien y a-t-il de trajets possibles ? Justifier la démarche puis décrire chacun de ces trajets.

EXERCICE 3

[Inde, Pondichéry 2017]

1. a. Quelles caractéristiques ?

Les caractéristiques du graphe prouvant qu'il existe un trajet qui permette à Alexis d'emprunter chaque liaison aérienne une et une seule fois sont :

- **Le graphe est connexe** car il existe une chaîne entre deux sommets quelconques de ce graphe. En effet, deux sommets quelconques de ce graphe peuvent, par exemple, être reliés par une chaîne extraite de la chaîne : $A - B - C - M - N - W$.
- **Le graphe G admet une chaîne eulérienne.**

En effet, d'après le cours :

G étant un graphe connexe, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- Deux sommets (et deux seulement) X et Y de G sont de degré impair.
- G admet une chaîne eulérienne d'extrémités X et Y .

Ici, le tableau des sommets degrés est le suivant :

Sommets	A	B	C	M	N	W
Degrés	2	2	4	3	3	4

Il y a donc 2 sommets M et N de degré impair.

Par conséquent : **le graphe admet une chaîne eulérienne.**

Ainsi, d'après le théorème d'Euler: oui, il existe un trajet qui permet à Alexis d'emprunter chaque liaison aérienne une et une seule fois.

1. b. Donnons un exemple d'un tel trajet:

Un exemple pour aller de N à M est: N - B - C - W - N - M - W - A - C - M.

2. Déterminons le trajet le moins cher, pour aller de B à M, ainsi que le coût de ce trajet:

Après recours à l'algorithme de Dijkstra, nous trouvons comme trajet qu'Alexis doit suivre pour aller de B à M, tout en minimisant ses coûts:

le trajet B - C - M.

Et ce trajet coûtera: $130 + 150 = 280$ dollars.

Au total, le trajet qu'Alexis doit suivre pour aller de Boston à Miami, tout en minimisant sa dépense est: B - C - M, et Alexis dépensera 280 dollars.

3. a. Donnons la matrice d'adjacence P de ce graphe:

La matrice d'adjacence P de ce graphe est:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. b. Déterminons le nombre de trajets possibles:

Comme Alexis désire utiliser trois liaisons aériennes maximum, pour aller d'Atlanta à Boston, nous devons écrire: M , M^2 et M^3 .

• $M = P$,

$$\bullet M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \text{ à l'aide d'une calculatrice,}$$

$$\bullet M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 7 & 2 & 6 & 3 \\ 6 & 7 & 4 & 9 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 9 & 4 & 7 & 7 \\ 4 & 6 & 3 & 7 & 2 & 8 \\ 6 & 3 & 9 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}, \text{ à l'aide d'une calculatrice.}$$

Pour répondre à la question, nous allons regarder le chiffre indiqué sur la 1^{ère} ligne (A), 2^{ème} colonne (B), et ce, pour les matrices M , M^2 et M^3 .

Pour M : le chiffre est: 0.

Pour M^2 : le chiffre est: 1.

Pour M^3 : le chiffre est: 2.

Au total, il existe trois possibilités pour Alexis:

- relier A à B en 2 liaisons aériennes: A - C - B

(coûts = 100 + 130 \Rightarrow coûts = 230 dollars),

- relier A à B en 3 liaisons aériennes: A - W - C - B

(coûts = 130 + 120 + 130 \Rightarrow coûts = 380 dollars),

- relier A à B en 3 liaisons aériennes: A - W - N - B

(coûts = 130 + 140 + 170 \Rightarrow coûts = 440 dollars).

Alexis aura tout intérêt à choisir le trajet A - C - B car c'est le moins cher pour son portefeuille.