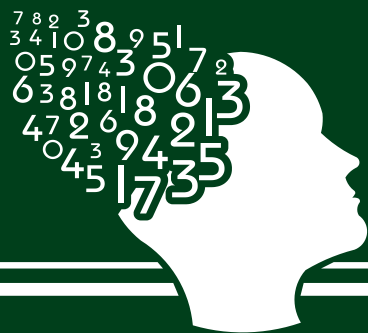


Corrigé

Exercice 4



freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES - Série ES

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 5

MATHÉMATIQUES - Série L

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 4

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 9 pages
numérotées de 1/9 à 9/9 .

EXERCICE 4 (6 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Dans cette partie, les réponses seront données sans justification, avec la précision permise par le graphique situé en annexe en page 9/9.

Celui-ci présente dans un repère d'origine O la courbe représentative \mathcal{C} d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0;7]$.

1. Encadrer par deux entiers consécutifs chacune des solutions de l'équation $f(x) = 10$ sur l'intervalle $[0;7]$.
2. Donner le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0;7]$ et préciser la valeur en laquelle il est atteint.
3. La valeur de l'intégrale $\int_1^3 f(x) dx$ appartient à un seul des intervalles suivants. Lequel?
(a) $[9;17]$ (b) $[18;26]$ (c) $[27;35]$

Partie B

La courbe donnée en annexe page 9/9 est la représentation graphique de la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0;7]$ d'expression :

$$f(x) = 2x e^{-x+3}$$

On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f .

1. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0;7]$, $f'(x) = (-2x + 2)e^{-x+3}$.
2.
 - a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0;7]$ puis en déduire le tableau de variation de la fonction f sur ce même intervalle.
 - b) Calculer le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0;7]$.
3.
 - a) Justifier que l'équation $f(x) = 10$ admet deux solutions sur l'intervalle $[0;7]$ que l'on notera α et β avec $\alpha < \beta$.

b) On admet que $\alpha \simeq 0,36$ à 10^{-2} près.

Donner une valeur approchée de β à 10^{-2} près.

4. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0;7]$ par :

$$F(x) = (-2x - 2)e^{-x+3}$$

a) Justifier que F est une primitive de f sur l'intervalle $[0;7]$.

b) Calculer la valeur exacte de l'aire, en unités d'aire, du domaine plan délimité par les droites d'équation $x = 1$, $x = 3$, l'axe des abscisses et la courbe \mathcal{C} .

5. La fonction f étudiée modélise le bénéfice d'une entreprise, en milliers d'euros, réalisé pour la vente de x centaines d'objets (x compris entre 0 et 7).

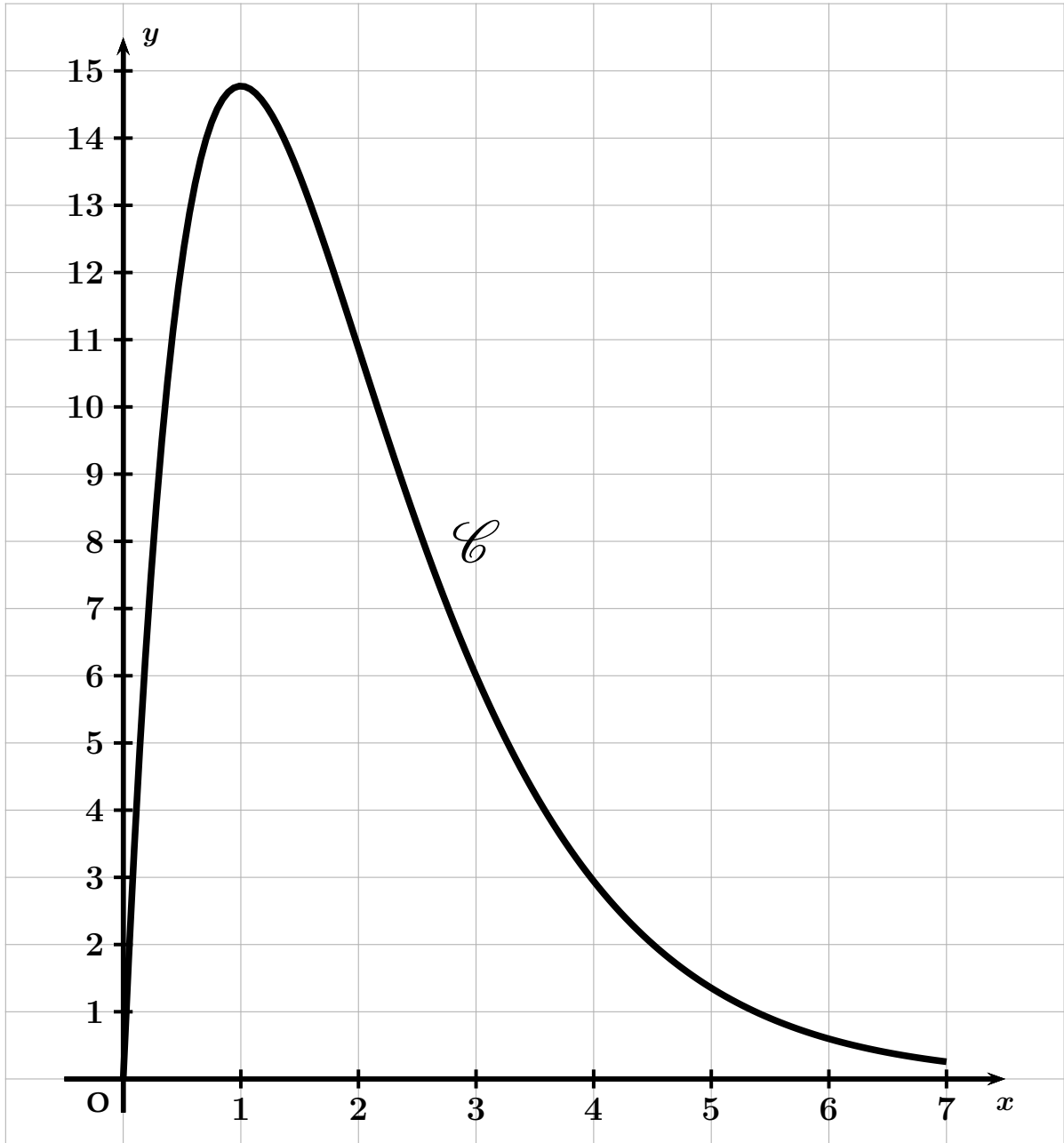
a) Calculer la valeur moyenne du bénéfice, à l'euro près, lorsque l'entreprise vend entre 100 et 300 objets.

b) L'entreprise souhaite que son bénéfice soit supérieur à 10 000 euros.

Déterminer le nombre d'objets possibles que l'entreprise devra vendre pour atteindre son objectif.

ANNEXE

N'est pas à rendre avec la copie



EXERCICE 4

[Inde, Pondichéry 2017]

Partie A:

1. Encadrons chacune des solutions de l'équation $f(x) = 10$ sur l'intervalle $[0; 7]$:

L'équation $f(x) = 10$ admet deux solutions sur l'intervalle $[0; 7]$.

Soient x_1 et x_2 ces deux solutions.

Les deux encadrements (par 2 entiers consécutifs) des solutions x_1 et x_2 sont respectivement: $[0; 1]$ et $[2; 3]$.

2. Donnons le maximum de f sur l'intervalle $[0; 7]$ en précisant la valeur en laquelle il est atteint:

La fonction f atteint son maximum quand: $x = 1$.

Quand $x = 1$: $f(1) \approx 14,8$.

Au total: f est maximum quand $x = 1$ et en ce point $f_{\max} \approx 14,8$.

3. Déterminons à quel intervalle appartient l'intégrale:

$$\text{Ici: } I = \int_1^3 f(x) dx.$$

En unités d'aire et à l'unité près, l'aire $\mathcal{A} = I$ du domaine compris entre la courbe (\mathcal{C}) , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$, est telle que: $18 < \mathcal{A} < 26$ (plus de 23 carreaux et moins de 26 carreaux, en comptant).

Au total, nous retiendrons l'intervalle: $[18; 26]$.

Partie B:

1. Déterminons f' pour tout réel x de l'intervalle $[0; 7]$:

Ici: • $f(x) = 2x e^{-x+3}$ (u x v)

• $Df = [0; 7]$

• f est définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 7]$.

Comme f est dérivable sur $[0; 7]$, nous pouvons calculer f' :

Pour tout $x \in [0; 7]$: $f'(x) = 2x e^{-x+3} + 2x \times (-e^{-x+3})$ ($u' \times v + u \times v'$)

$$\Rightarrow f'(x) = e^{-x+3} \times (-2x + 2).$$

Au total, pour tout $x \in [0; 7]$: $f'(x) = (-2x + 2) \times e^{-x+3}$.

2. a. Étudions le signe de f' sur $[0; 7]$ et dressons le tableau de variation de f :

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $x \in [0; 7]$:

• 1^{er} cas: $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0 \text{ ssi } (-2x + 2) \times e^{-x+3} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x + 2 = 0^*, \text{ cad: } x = 1.$$

• 2^{ème} cas: $f'(x) < 0$.

$$f'(x) < 0 \text{ ssi } (-2x + 2) \times e^{-x+3} < 0$$

$$\Leftrightarrow -2x + 2 < 0^*, \text{ cad: } x > 1 \text{ ou } x \in]1; 7].$$

• 3^{ème} cas: $f'(x) > 0$.

$$f'(x) > 0 \text{ ssi } (-2x + 2) \times e^{-x+3} > 0$$

$$\Leftrightarrow -2x + 2 > 0^*, \text{ cad: } x < 1 \text{ ou } x \in [0; 1[.$$

(*: car pour tout $x \in [0; 7]$, $e^{-x+3} > 0$)

Au total: • f est croissante sur $[0; 1]$,

(car sur $[0; 1]$, $f'(x) \geq 0$)

• f est décroissante sur $[1; 7]$.

(car sur $[1; 7]$, $f'(x) \leq 0$)

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation suivant:

x	0	1	7		
f'		+	0	-	
f			a	b	c

(Note: In the original image, arrows point from 'a' to 'b' and from 'b' to 'c' in the third row of the table.)

Avec: • $a = f(0) \Rightarrow a = 0$,

• $b = f(1) \Rightarrow b = 2e^2 \quad (\approx 14,78)$,

• $c = f(7) \Rightarrow c = 14e^{-4} \quad (\approx 0,26)$.

2. b. Calculons le maximum de f sur l'intervalle $[0; 7]$:

Le maximum de f sur $[0; 7]$ est atteint quand $f'(x) = 0$.

Or: $f'(x) = 0$ quand $x = 1$.

Ainsi: le point $A(1; 2e^2)$ est le maximum de f sur $[0; 7]$.

3. a. Justifions que l'équation $f(x) = 10$ admet deux solutions α et β sur l'intervalle $[0; 7]$:

Pour cela, nous allons dresser un nouveau tableau de variation:

x	0	α	1	β	7
f'		+	0	-	
f		$f(\alpha)$	b	$f(\beta)$	

Diagramme de variation pour la fonction f sur $[0; 7]$. Le tableau ci-dessus est complété par des annotations : une flèche violette part de a (en rouge) sous $x=0$ et pointe vers $f(\alpha)$; une autre flèche violette part de $f(\beta)$ et pointe vers c (en rouge) sous $x=7$. Les points a , b et c sont alignés horizontalement.

- Avec :
- $a = 0$,
 - $b \approx 14,78$,
 - $c \approx 0,26$,
 - $f(\alpha) = f(\beta) = 10$.

Le nouveau tableau de variation nous montre qu'il existe bien deux solutions α et β telles que: $f(\alpha) = f(\beta) = 10$.

Au total α et β existent bien avec: $\alpha \in [0; 1]$ et $\beta \in [1; 7]$.

3. b. Donnons une valeur approchée de β sachant que $\alpha \approx 0,36$ à 10^{-2} près:

Par tâtonnement, nous trouvons: $\beta \approx 2,16$ à 10^{-2} près.

Au total, à 10^{-2} près: $\alpha \approx 0,36 \in [0; 1]$ et $\beta \approx 2,16 \in [1; 7]$.

4. a. Justifions que F est une primitive de f sur $[0; 7]$:

Sur l'intervalle $[0; 7]$, F est une primitive de f ssi: $F'(x) = f(x)$.

Ici: $F(x) = (-2x - 2)e^{-x+3}$ (u x v).

$$\text{D'où: } F'(x) = -2x e^{-x+3} + (-2x - 2)x(-e^{-x+3}) \quad (u'xv + uxv')$$

$$\Rightarrow F'(x) = 2x x e^{-x+3}.$$

Au total: F est bien une primitive de f car $F'(x) = f(x)$.

4. b. Calculons l'aire demandée:

$$\text{Ici, il s'agit de calculer: } \mathcal{A} = \int_1^3 f(x) dx.$$

$$\text{Nous avons: } \mathcal{A} = [F(x)]_1^3$$

$$\Rightarrow \mathcal{A} = -8 + 4e^2 \text{ u a ou } \mathcal{A} \approx 21,55 \text{ u a}$$

Au total, la valeur exacte de l'aire demandée est: $\mathcal{A} = -8 + 4e^2 \text{ u a}$

5. a. Calculons la valeur moyenne du bénéfice:

Soit " m ", la valeur moyenne de f sur $[1; 3]$.

$$m \text{ est telle que: } m = \frac{1}{3-1} \int_1^3 f(x) dx.$$

$$\text{Or: } \int_1^3 f(x) dx = \mathcal{A}.$$

$$\text{D'où la valeur moyenne du bénéfice est: } \frac{1}{3-1} \times \mathcal{A} \times 1000 \text{ €}.$$

Au total, la valeur moyenne du bénéfice, à l'euro près est: $m = 10\,778 \text{ €}$.

5. b. Déterminons le nombre d'objets que l'entreprise devra vendre:

Pour atteindre l'objectif fixé, le nombre d'objets que doit vendre l'entreprise devra être compris entre α et β .

Ainsi, le nombre d'objets doit être compris entre: 36 et 216.