Corrigé

Exercice 3

freemaths.fr

Sujets Mathématiques Bac 2017
freemaths.fr
Inde

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES - Série ES

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures **Coefficient : 5**

MATHÉMATIQUES - Série L

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures **Coefficient : 4**

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 9 pages numérotées de 1/9 à 9/9 .

freemaths.fr freemaths.fr

EXERCICE 3 (5 points)

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 150$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,8\,u_n + 45$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Voici deux propositions d'algorithmes :

Algorithme 1	Algorithme 2
Variables :	**Variables :**
N est un entier naturel	N est un entier naturel
U est un nombre réel	U est un nombre réel
Initialisation :	**Initialisation :**
U prend la valeur 150	U prend la valeur 150
N prend la valeur 0	N prend la valeur 0
Traitement :	**Traitement :**
Tant que $U \geqslant 220$	Tant que $U < 220$
U prend la valeur $0,8 \times U + 45$	U prend la valeur $0,8 \times U + 45$
N prend la valeur $N + 1$	N prend la valeur $N + 1$
Fin Tant que	Fin Tant que
Sortie :	**Sortie :**
Afficher N	Afficher N

Algorithme 1 **Algorithme 2**

a) Un seul de ces algorithmes permet de calculer puis d'afficher le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 220$.

Préciser lequel en justifiant pourquoi l'autre algorithme ne le permet pas.

b) Quelle est la valeur numérique affichée par l'algorithme choisi à la question précédente ?

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 225$.

a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et préciser son premier terme et sa raison.

b) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 225 - 75 \times 0,8^n$.

4. Une petite ville de province organise chaque année une course à pied dans les rues de son centre. En 2015, le nombre de participants à cette course était de 150.

On fait l'hypothèse que d'une année sur l'autre :

- 20 % des participants ne reviennent pas l'année suivante ;
- 45 nouveaux participants s'inscrivent à la course.

La petite taille des ruelles du centre historique de la ville oblige les organisateurs à limiter le nombre de participants à 250.

Vont-ils devoir refuser des inscriptions dans les années à venir ? Justifier la réponse.

EXERCICE 3

[Inde, Pondichéry 2017]

1. Calculons U_1 et U_2:

• Il s'agit de calculer U_1.

$U_1 = 0,8\ U_0 + 45 \iff U_1 = 0,8 \times 150 + 45$

$\implies U_1 = 165.$

Ainsi: $U_1 = 165$.

• Il s'agit de calculer U_2.

$U_2 = 0,8\ U_1 + 45 \iff U_2 = 0,8 \times 165 + 45$

$\implies U_2 = 177.$

Ainsi: $U_2 = 177$.

2. a. Précisons lequel des deux algorithmes choisir en justifiant:

Le bon algorithme est le: n° 2.

En effet, en ce qui concerne le n° 1, il y a deux lignes qui se contredisent:

• U prend la valeur 150

• Tant que $U \geqslant 220$

(la valeur de U est initialisée à $150 < 220$).

2. b. Déterminons la valeur numérique affichée par l'algorithme:

A l'aide d'une calculatrice, on trouve: $U_{13} \approx 220,9$.

Ainsi, la valeur numérique affichée par l'algorithme est:

$$N = 13 \text{ car } 220,9 > 220.$$

3. a. Montrons que (V_n) est une suite géométrique et déterminons V_0 et q:

$V_n = U_n - 225 \iff V_{n+1} = U_{n+1} - 225$

$\iff V_{n+1} = (0,8\,U_n + 45) - 225 \quad (1).$

Or: $V_0 = U_0 - 225 \implies V_0 = -75$ et $U_n = V_n + 225$.

Ainsi: $(1) \iff V_{n+1} = (0,8\,[V_n + 225] + 45) - 225$

$\implies V_{n+1} = 0,8\,V_n$.

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $V_0 = -75$.

3. b. Déduisons-en que, pour tout entier naturel n, $U_n = 225 - 75 \times 0,8^n$:

Nous savons que: * $V_n = -75 \times (0,8)^n$ (d'après le cours)

* $U_n = V_n + 225$.

D'où: $U_n = -75 \times (0,8)^n + 225$ ou $U_n = 225 - 75 \times (0,8)^n$.

4. Vont-ils devoir refuser des inscriptions dans les années à venir ?

Notons que les 2 hypothèses reviennent à dire que nous sommes en présence de la suite (U_n).

Il s'agit de savoir s'il existe un entier naturel " **n** " tel que: $U_n > 250$.

$U_n > 250 \iff 225 - 75 \times (0,8)^n > 250$.

Or, pour tout entier naturel " **n** ": $\mathbf{225 - 75 \times (0,8)^n}$ est toujours strictement inférieur à 225.

Donc, pour tout entier naturel " **n** ", on aura toujours: $\mathbf{U_n < 225 < 250}$.

Ainsi, il n'existe pas d'entier naturel " **n** " qui vérifie: $U_n > 250$.

Donc, nous pouvons affirmer qu'aucune inscription ne sera refusée dans les années à venir.