Corrigé

Exercice 4

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2016

MATHÉMATIQUES - Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures   Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 9 pages numérotées de 1/9 à 9/9 .

EXERCICE 4 (5 points)

Une étude statistique sur une population d'acheteurs a montré que :

- 90 % des personnes qui ont fait leur dernier achat en utilisant Internet affirment vouloir continuer à utiliser Internet pour faire le suivant. Les autres personnes comptent faire leur prochain achat en magasin ;
- 60 % des personnes qui ont fait leur dernier achat en magasin affirment vouloir continuer à effectuer le suivant en magasin. Les autres comptent effectuer leur prochain achat en utilisant Internet.

Dans toute la suite de l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

Une personne est choisie au hasard parmi les acheteurs.

On note :

- a_n la probabilité que cette personne fasse son $n-$ième achat sur Internet ;
- b_n la probabilité que cette personne fasse son $n-$ième achat en magasin.

On suppose de plus que $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$.

On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ l'état probabiliste correspondant au $n-$ième achat. Ainsi $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On note :

- A l'état : « La personne effectue son achat sur Internet » ;
- B l'état : « La personne effectue son achat en magasin ».

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.

2. Écrire la matrice de transition M associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.

3. **(a)** Calculer la matrice M^4.

(b) En déduire que la probabilité que la personne interrogée fasse son 5ᵉ achat sur Internet est égale à 0,812 5.

4. On note $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ l'état stable associé à ce graphe.

(a) Montrer que les nombres a et b sont solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 0,1\,a & - & 0,4\,b & = & 0 \\ a & + & b & = & 1 \end{array}\right.$$

(b) Résoudre le système précédent.

(c) À long terme, quelle est la probabilité que cette personne fasse ses achats sur Internet ?

5. **(a)** Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$a_{n+1} = 0,5\,a_n + 0,4$$

(b) Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il affiche le plus petit entier naturel n non nul tel que $a_n \leqslant 0,801$.

Variables :	N est un entier naturel
	A est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à N la valeur 1
	Affecter à A la valeur 1
Traitement :	Tant que ....
	Affecter à A la valeur $0,5 \times A + 0,4$
	Affecter à N la valeur ....
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher N

(c) Quelle est la valeur affichée par l'algorithme en sortie ?

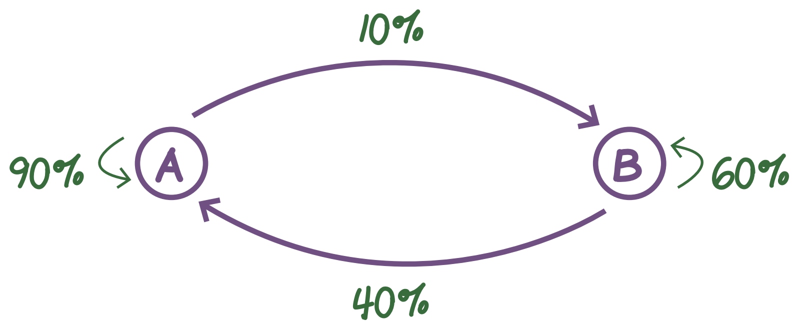
EXERCICE 4

[Inde, Pondichéry 2016]

1. Traduisons les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets A et B:

Soient:
- A, l'état: " La personne effectue son achat sur Internet ",
- B, l'état: " La personne effectue son achat en magasin ".

Le graphe probabiliste G est le suivant:



2. Ecrivons la matrice de transition M de ce graphe, en respectant l'ordre alphabétique des sommets:

La matrice associée au graphe probabiliste ou matrice de transition M est:

$$M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

3. a. Calculons la matrice M^4:

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$M^4 = \begin{pmatrix} 0,8125 & 0,1875 \\ 0,75 & 0,25 \end{pmatrix}.$$

Au total:

$$M^4 = \begin{pmatrix} 0,8125 & 0,1875 \\ 0,75 & 0,25 \end{pmatrix}.$$

3. b. Déduisons-en que la probabilité que la personne interrogée fasse son 5e achat sur Internet est de 81,25%:

Soient: M la matrice de transition du graphe probabiliste à 2 sommets (A et B), P_1 la matrice ligne décrivant l'état initial et P_5 l'état probabiliste à l'état $n = 5$.

Nous avons: $P_5 = P_1 \times M^{(5-1)}$, avec $P_1 = (a_1 \quad b_1) = (1 \quad 0)$.

Dans ces conditions: $P_5 = (1 \quad 0) \times \begin{pmatrix} 0,8125 & 0,1875 \\ 0,75 & 0,25 \end{pmatrix}$

cad: $P_5 = (0,8125 \quad 0,1875)$.

D'où: $a_5 = 81,25\%$ et $b_5 = 18,75\%$.

Au total, la probabilité que la personne interrogée fasse son 5e achat sur Internet correspond à: a_5 cad $81,25\%$.

4. a. Montrons que les nombres a et b sont bien solutions du système donné:

D'après le cours, nous savons que l'état stable P est l'unique solution de l'équation $P = P \times M$.

Or ici, la matrice associée au graphe probabiliste ou matrice de transition M est:

$$M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Posons: $P = (a \quad b)$.

Dans ces conditions: $P = P \times M$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 \times a + 0,4 \times b & 0,1 \times a + 0,6 \times b \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a = 0,9 \times a + 0,4 \times b \\ b = 0,1 \times a + 0,6 \times b \end{cases} .$$

Au total, les nombres a et b sont bien solutions du système:

$$\begin{cases} a = 0,9 \times a + 0,4 \times b \\ b = 0,1 \times a + 0,6 \times b \end{cases} \text{ cad: } \begin{cases} 0,1a - 0,4b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} .$$

4. b. Résolvons le système:

$$\begin{cases} 0,1a - 0,4b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 0,1a - 0,4(1 - a) = 0 \\ b = 1 - a \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 0,8 \\ b = 0,2 \end{cases} .$$

Au total: $P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$ correspond à l'état stable de ce graphe.

4. c. Déterminons, à long terme, la probabilité que cette personne fasse ses achats sur Internet:

A long terme, l'état de P_n à l'étape n converge vers P un état stable indépendant de l'état initial P_1.

Or l'état stable nous indique qu'au bout de n années (" n très grand "), la probabilité que la personne fasse ses achats sur Internet est de:

0,8 cad: 80%.

Au total: à long terme, la probabilité que la personne fasse ses achats sur Internet est de 80%.

5. a. Montrons que, pour tout entier naturel non nul n, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,4$:

D'après le cours, nous savons que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $P_{n+1} = P_n \times M$.

D'où: $(a_{n+1} \quad b_{n+1}) = (a_n \quad b_n) \times \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow (a_{n+1} \quad b_{n+1}) = (0,9a_n + 0,4b_n \quad 0,1a_n + 0,6b_n)$

$\Rightarrow a_{n+1} = 0,9a_n + 0,4b_n$. (a)

Or, d'après le cours: $a_n + b_n = 1$, pour tout entier naturel non nul n.

Dans ces conditions: (a) $\Leftrightarrow a_{n+1} = 0,9a_n + 0,4\,(1 - a_n)$, car $b_n = 1 - a_n$

$\Rightarrow a_{n+1} = 0,5a_n + 0,4$.

Au total, pour tout entier naturel non nul n, nous avons: $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,4$.

5. b. Complétons l'algorithme:

L'algorithme complété est le suivant:

Initialisation:

...

...

Traitement: Tant que $A > 0,801$

Affecter à A la valeur $0,5 \times A + 0,4$

Affecter à N la valeur $N + 1$

Fin du Tant que

Sortie: Afficher N

5. c. Déterminons la valeur affichée par l'algorithme en sortie:

La valeur affichée à la fin de l'exécution est: $N = 9$.

En effet:

- $P_8 = (0,801 \quad 0,1984)$
- $P_9 = (0,8008 \quad 0,1992)$.