Corrigé

Exercice 1

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2016

MATHÉMATIQUES - Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures   Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 9 pages
numérotées de 1/9 à 9/9 .

EXERCICE 1 (4 points)

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des quatre questions posées, une seule des trois réponses proposées est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Une réponse multiple ne rapporte aucun point.

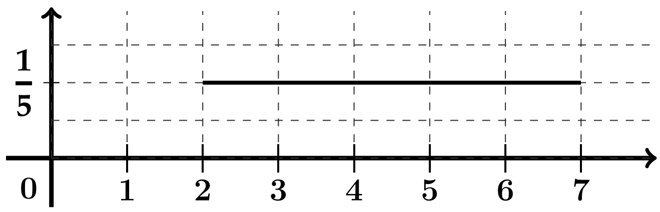
1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 3x - x\ln x$.
On admet que f est dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et on désigne par f' sa fonction dérivée.
Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ on a :

(a) $f'(x) = 3 - \dfrac{1}{x}$ **(b)** $f'(x) = 3 - \ln x$ **(c)** $f'(x) = 2 - \ln x$

2. On considère la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.
La somme des 13 premiers termes de cette suite vaut :

(a) 4 095 **(b)** 8 191 **(c)** $\dfrac{1-2^{14}}{1-2}$

3. Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[2\,;7]$ dont la fonction de densité est représentée ci-dessous.



$P(\text{A})$ désigne la probabilité d'un évènement A et $E(X)$ l'espérance de la variable aléatoire X.

(a) $P(3 \leqslant X \leqslant 7) = \dfrac{1}{4}$ **(b)** $P(X \geqslant 4) = P(2 \leqslant X \leqslant 5)$ **(c)** $E(X) = \dfrac{9}{5}$

4. On réalise un sondage sur un échantillon de n personnes (n, entier naturel non nul).
Parmi les tailles de l'échantillon proposées ci-dessous, quelle est celle qui permet d'obtenir un intervalle de confiance au niveau de confiance $0,95$ avec une amplitude de $0,02$?

(a) $n = 5\,000$ **(b)** $n = 100$ **(c)** $n = 10\,000$

EXERCICE 1

[Inde, Pondichéry 2016]

1. c. est la bonne réponse, avec c.: " $f'(x) = 2 - \ln x$ ".

- f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

- Par conséquent, nous pouvons calculer f' pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$:

$$f'(x) = 3 - [\,1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}\,]$$

$$\Longleftrightarrow\ f'(x) = 3 - (\ln x + 1)$$

$$\Rightarrow\ f'(x) = 2 - \ln x.$$

2. c. est la bonne réponse, avec c.: " $S = \frac{1 - 2^{14}}{1 - 2}$ ".

- D'après le cours: $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

- Or ici: $S = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_{13} \Longleftrightarrow S = U_0 + q \cdot U_0 + q^2 \cdot U_0 + \ldots + q^{13} \cdot U_0$

$$\Longleftrightarrow\ S = U_0 \times (1 + q + q^2 + \ldots + q^{13})$$

$$\Longleftrightarrow\ S = U_0 \times \left[\frac{1 - q^{14}}{1 - q}\right]$$

$$\Longleftrightarrow\ S = 1 \times \left[\frac{1 - 2^{14}}{1 - 2}\right]$$

ou encore: $S = \frac{1 - 2^{14}}{1 - 2}$.

3. b. est la bonne réponse, avec b.: " $P(X \geqslant 4) = P(2 \leqslant X \leqslant 5)$ ".

- D'après le cours, quand X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[2\,;7]$:

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \frac{b-a}{7-2}.$$

- Ici: • $P(2 \leqslant X \leqslant 5) = \frac{5-2}{7-2}$ => $P(2 \leqslant X \leqslant 5) = \frac{3}{4}$,

  • $P(X \geqslant 4) = P(4 \leqslant X \leqslant 7)$ <=> $P(X \geqslant 4) = \frac{7-4}{7-2}$

  => $P(X \geqslant 4) = \frac{3}{4}$.

- D'où: $P(X \geqslant 4) = P(2 \leqslant X \leqslant 5)$.

4. c. est la bonne réponse, avec c.: " $n = 10\,000$ ".

- D'après le cours, nous savons que: $I = [f - \frac{1}{\sqrt{n}}\,; f + \frac{1}{\sqrt{n}}]$.

- L'amplitude A de l'intervalle ou longueur L de l'intervalle est:

$$A = L = \left(f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \left(f - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

=> $A = L = \frac{2}{\sqrt{n}}$.

- Or, d'après l'énoncé, $A = 0,02$.

D'où: $\frac{2}{\sqrt{n}} = 0,02$ => $n = 10\,000$.

- Au total: la taille de l'échantillon doit être de 10 000 individus.