Corrigé

Exercice 4

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2016

MATHÉMATIQUES - Série ES
ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures   Coefficient : 5

MATHÉMATIQUES - Série L
ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures   Coefficient : 4

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 9 pages numérotées de 1/9 à 9/9 .

EXERCICE 4 (5 points)

En janvier 2016, une personne se décide à acheter un scooter coûtant 5 700 euros sans apport personnel. Le vendeur lui propose un crédit à la consommation d'un montant de 5 700 euros, au taux mensuel de $1,5\,\%$. Par ailleurs, la mensualité fixée à 300 euros est versée par l'emprunteur à l'organisme de crédit le 25 de chaque mois. Ainsi, le capital restant dû augmente de $1,5\,\%$ puis baisse de 300 euros.

Le premier versement a lieu le 25 février 2016.

On note u_n le capital restant dû en euros juste après la n−ième mensualité (n entier naturel non nul). On convient que $u_0 = 5\,700$.

Les résultats seront donnés sous forme approchée à $0,01$ près si nécessaire.

1. **(a)** Démontrer que u_1, capital restant dû au 26 février 2016 juste après la première mensualité, est de 5 485,50 euros.

(b) Calculer u_2.

2. On admet que la suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par : $u_{n+1} = 1,015\,u_n - 300$.

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel
	u est un nombre réel
Traitement :	Affecter à u la valeur 5 700
	Affecter à n la valeur 0
	Tant que $u > 4\,500$ faire
	u prend la valeur $1,015 \times u - 300$
	n prend la valeur $n + 1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

(a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous en ajoutant autant de colonnes que nécessaires entre la deuxième et la dernière colonne.

Valeur de u	5 700	…		
Valeur de n	0	…		
$u > 4\,500$ (vrai/faux)	vrai	…	vrai	faux

(b) Quelle valeur est affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme ?
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 20\,000$.

(a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $v_{n+1} = 1,015 \times v_n$.

(b) En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 20\,000 - 14\,300 \times 1,015^n$.

4. À l'aide de la réponse précédente, répondre aux questions suivantes :

(a) Démontrer qu'une valeur approchée du capital restant dû par l'emprunteur au 26 avril 2017 est 2 121,68 euros.

(b) Déterminer le nombre de mensualités nécessaires pour rembourser intégralement le prêt.

(c) Quel sera le montant de la dernière mensualité ?

(d) Lorsque la personne aura terminé de rembourser son crédit à la consommation, quel sera le coût total de son achat ?

EXERCICE 4

[Inde, Pondichéry 2016]

1. a. Démontrons que $U_1 = 5\,485,50$ €:

Il s'agit de calculer U_1.

$U_1 = (1 + 1,5\%)\ U_0 - 300 \iff U_1 = 1,015 \times 5\,700 - 300$

$\iff U_1 = 5\,785,50 - 300 \Rightarrow U_1 = 5\,485,50$ €.

Ainsi, le capital restant dû au 26 février 2016, juste après la première mensualité, est de: 5 485, 50 €.

1. b. Calculons U_2:

Il s'agit de calculer U_2.

$U_2 = (1 + 1,5\%)\ U_1 - 300 \iff U_2 = 1,015 \times 5\,485,50 - 300$

$\Rightarrow U_2 = 5\,267,78$ €.

Ainsi, le capital restant dû au 26 mars 2016, juste après la seconde mensualité, est de: 5 267, 78 €.

2. a. Recopions et complétons le tableau:

$U_{n+1} = 1,015\ U_n - 300$, d'où le tableau complété suivant:

Valeur de u	5 700	5 485, 50	5 267, 78	5 046, 80	4 822, 50	4 594, 84	4 363, 76
Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6
u > 4500	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux

2. b. Déterminons la valeur affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme et interprétons:

La valeur affichée est: $n = 6$.

Cela signifie que le capital restant dû sera inférieur à 4500 € à partir du sixième mois de remboursement.

3. a. Montrons que (V_n) est géométrique, avec $V_{n+1} = 1,015 \times V_n$:

$V_n = U_n - 20000 \iff V_{n+1} = U_{n+1} - 20000$

$\iff V_{n+1} = (1,015\, U_n - 300) - 20000 \quad (1).$

Or: $V_0 = U_0 - 20000 \Rightarrow V_0 = -14300$ et $U_n = V_n + 20000$.

Ainsi: $(1) \iff V_{n+1} = (1,015\,[V_n + 20000] - 300) - 20000$

$\Rightarrow V_{n+1} = 1,015\, V_n.$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 1,015$ et de premier terme $V_0 = -14300$.

3. b. Déduisons-en que pour tout entier naturel n, $U_n = 20000 - 14300 \times 1,015^n$:

Comme $V_{n+1} = 1,015\, V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$V_n = V_0 \times (1,015)^n$, avec: $V_0 = -14300$.

De plus, nous savons que: * $V_n = -14300 \times (1,015)^n$

* $U_n = V_n + 20000$.

D'où: $U_n = -14300 \times (1,015)^n + 20000$.

OU BIEN: $U_n = 20000 - 14300 \times (1,015)^n$.

4. a. Déterminons le montant du capital restant dû au 26 avril 2017:

Cela revient à calculer U_{15} car le 25 avril 2017 a lieu le remboursement de la quinzième mensualité.

$U_{15} = 20000 - 14300 \times (1,015)^{15}$ => $U_{15} = 2\,121,68$ €.

Ainsi, le capital restant dû au 26 avril 2017, juste après la quinzième mensualité, est de: 2 121, 68 €.

4. b. Déterminons le nombre de mensualités nécessaires pour rembourser intégralement le prêt:

Il s'agit de déterminer " n " tel que: $U_n = 0$.

$$U_n = 0 \iff 20000 - 14300 \times 1,015^n = 0$$

$$\iff 1,015^n = 1,3986$$

$$\iff n \ln(1,015) = \ln(1,3986)$$

$$\iff n = \frac{\ln(1,3986)}{\ln(1,015)}$$

$$\Rightarrow n = 22,5321.$$

Nous prendrons $n = 23$ mois car n est un entier naturel.

Cela signifie que le prêt sera intégralement remboursé après la 23ème mensualité cad le 26 janvier 2018.

4. c. Déterminons le montant de la dernière mensualité:

Nous devons calculer le montant de la 23ème mensualité.

Pour cela nous allons préalablement déterminer le capital restant dû, juste après le remboursement de la 22ème mensualité.

Il s'agit de calculer U_{22}.

$U_{22} = 20000 - 14300 \times 1,015^{22}$, cad: $U_{22} = 157,8391$ €.

Ainsi, le capital restant dû le 26 décembre 2017 est de: 157, 8391 €.

Dans ces conditions, la 23ème mensualité, réglée le 25 janvier 2018 sera de:

$$M_{23} = 157,8391 € \times 1,015 \Rightarrow M_{23} = 160,2066 €.$$

En conclusion, le montant de la dernière mensualité sera de: 160, 2066 €.

4. d. Déterminons le coût total de son achat:

Soit CT, le coût total de son achat.

$$CT = 22 \times 300 €^{1} + 160,2066 €^{2} \Rightarrow CT = 6760,2066 €.$$

1 = 22 mensualités de 300 € ;

2 = 1 mensualité de 160, 2066 €.

Son coût total est donc d'un montant de: 6760, 2066 €.