Corrigé

Exercice 2

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2016

MATHÉMATIQUES - Série ES

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures   Coefficient : 5

MATHÉMATIQUES - Série L

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures   Coefficient : 4

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 9 pages numérotées de 1/9 à 9/9 .

EXERCICE 2 (6 points)

La partie A peut être traitée indépendamment des parties B et C.

L'entreprise *BBE* (*Bio Bois Énergie*) fabrique et vend des granulés de bois pour alimenter des chaudières et des poêles chez des particuliers ou dans des collectivités.

L'entreprise produit entre 1 et 15 tonnes de granulés par jour.

- Les coûts de fabrication quotidiens sont modélisés par la fonction C définie sur l'intervalle $[1\,;15]$ par :

  $$C(x) = 0,3x^2 - x + \mathrm{e}^{-x+5}$$

  où x désigne la quantité de granulés en tonnes et $C(x)$ le coût de fabrication quotidien correspondant en centaines d'euros.

- Dans l'entreprise *BBE* le prix de vente d'une tonne de granulés de bois est de 300 euros.
  La recette quotidienne de l'entreprise est donc donnée par la fonction R définie sur l'intervalle $[1\,;15]$ par :

  $$R(x) = 3x$$

  où x désigne la quantité de granulés en tonnes et $R(x)$ la recette quotidienne correspondante en centaines d'euros.

- On définit par $D(x)$ le résultat net quotidien de l'entreprise en centaines d'euros, c'est-à-dire la différence entre la recette $R(x)$ et le coût $C(x)$, où x désigne la quantité de granulés en tonnes.

Partie A : Étude graphique

Sur le graphique situé en annexe (page 9/9), on donne $\mathscr{C}$ et Δ les représentations graphiques respectives des fonctions C et R dans un repère d'origine O.

Dans cette partie A, répondre aux questions suivantes à l'aide du graphique, et avec la précision permise par celui-ci. Aucune justification n'est demandée.

1. Déterminer la quantité de granulés en tonnes pour laquelle le coût quotidien de l'entreprise est minimal.

2. **(a)** Déterminer les valeurs de $C(6)$ et $R(6)$ puis en déduire une estimation du résultat net quotidien en euros dégagé par l'entreprise pour 6 tonnes de granulés fabriqués et vendus.

(b) Déterminer les quantités possibles de granulés en tonnes que l'entreprise doit produire et vendre quotidiennement pour dégager un résultat net positif, c'est-à-dire un bénéfice.

Partie B : Étude d'une fonction

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[1\,;15]$ par :

$$g(x) = -0,6\,x + 4 + \mathrm{e}^{-x+5}.$$

On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $[1\,;15]$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. **(a)** Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;15]$.

(b) En déduire que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[1\,;15]$.

2. **(a)** Dresser le tableau de variation de la fonction g sur l'intervalle $[1\,;15]$, en précisant les valeurs de $g(1)$ et de $g(15)$ arrondies à l'unité.

(b) Le tableau de variation permet d'affirmer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1\,;15]$.
Donner une valeur approchée de α à 0,1 près.

(c) Déduire des questions précédentes le tableau de signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[1\,;15]$.

Partie C : Application économique

1. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;15]$, on a :

$$D(x) = -0,3x^2 + 4x - \mathrm{e}^{-x+5}.$$

2. On admet que la fonction D est dérivable sur l'intervalle $[1\,;15]$ et on note D' sa fonction dérivée. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;15]$, on a $D'(x) = g(x)$, où g la fonction étudiée dans la partie B.

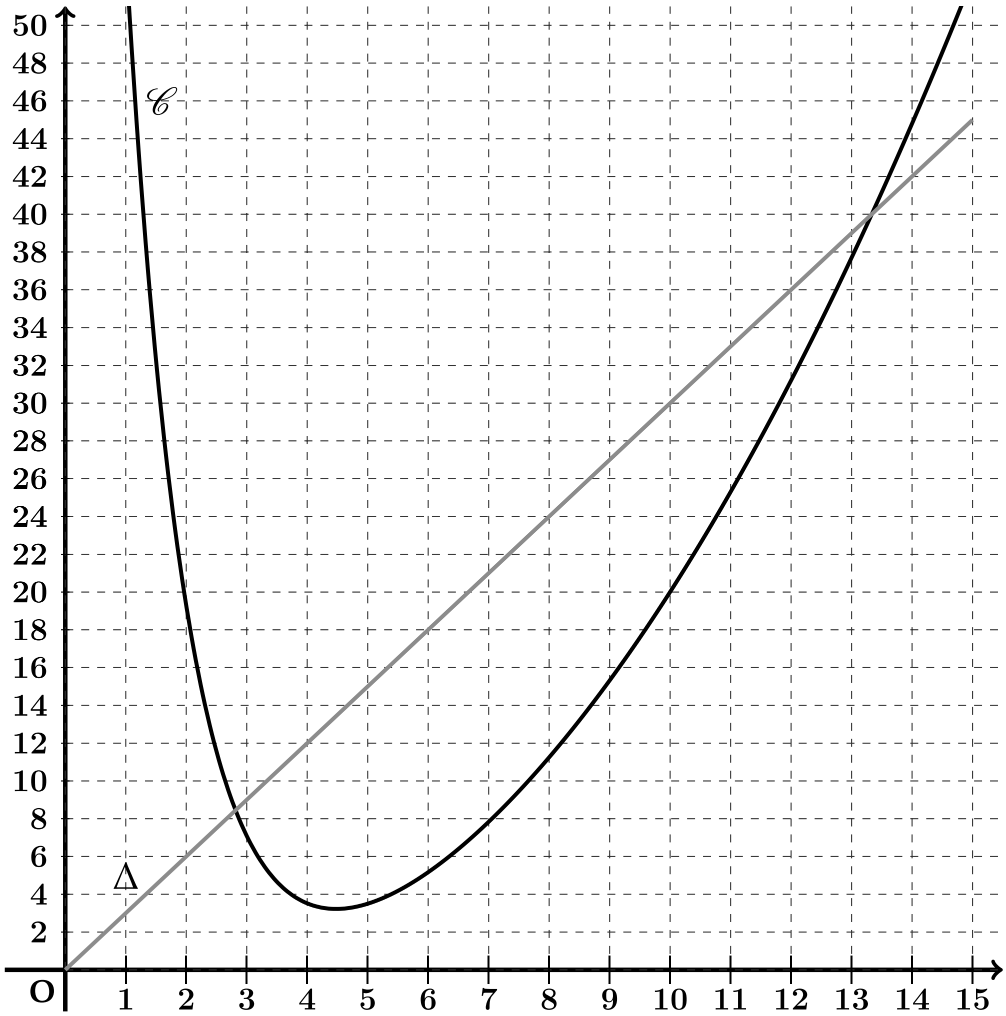
3. En déduire les variations de la fonction D sur l'intervalle $[1\,;15]$.

4. **(a)** Pour quelle quantité de granulés l'entreprise va-t-elle rendre son bénéfice maximal ?
On donnera une valeur approchée du résultat à 0,1 tonne près.

(b) Calculer alors le bénéfice maximal à l'euro près.

ANNEXE

N'est pas à rendre avec la copie



EXERCICE 2

[Inde, Pondichéry 2016]

Partie A: Étude Graphique

1. **Déterminons la quantité de granulés en tonnes pour laquelle le coût quotidien de l'entreprise est minimal:**

Pour répondre à cette question, graphiquement, il suffit de prendre le minimum de la courbe (C) (qui correspond en fait au minimum de la fonction C).

Une lecture graphique nous donne: $x_{min} \approx 4,5$ tonnes.

Au total, le coût quotidien de l'entreprise est minimal quand: la quantité de granulés produite est de 4, 5 tonnes.

2. a. **Déterminons C(6), R(6) et D(6):**

Graphiquement: $\left.\begin{array}{l} \bullet\ C(6) = 5 \\ \\ \bullet\ R(6) = 18 \end{array}\right\} \Rightarrow D(6) = R(6) - C(6) = 13.$

Au total, une estimation du résultat net quotidien en euros dégagé par l'entreprise pour 6 tonnes de granulés est de: 1300 € (1800 € - 500 €).

2. b. **Déterminons les quantités possibles de granulés en tonnes, pour que l'entreprise dégage un bénéfice:**

L'entreprise dégage un bénéfice ssi: $D(x) > 0$.

Or: $D(x) > 0$ ssi: $R(x) - C(x) > 0$, cad ssi: $R(x) > C(x)$.

Graphiquement, $R(x) > C(x)$ quand: $x \in]2,8 ; 13,3[$.

Au total, pour dégager un bénéfice, l'entreprise doit produire une quantité de granulés comprise entre: 2, 8 tonnes et 13, 3 tonnes.

Partie B: Étude d'une fonction

1. a. Calculons g' pour tout $x \in [1;15]$:

Ici: • $g(x) = -0,6x + 4 + e^{-x+5}$

• $Dg = [1;15]$.

Posons: $g = g_1 + g_2$, avec: $g_1(x) = -0,6x + 4$ et $g_2(x) = e^{-x+5}$.

g_1 est dérivable sur IR comme fonction polynôme, donc dérivable sur $[1;15]$.

g_2 est dérivable sur IR comme fonction " exponentielle ", donc dérivable sur l'intervalle $[1;15]$.

Par conséquent, g est dérivable sur $[1;15]$ comme somme de 2 fonctions dérivables sur $[1;15]$.

Ainsi, nous pouvons calculer g' pour tout $x \in [1;15]$.

Pour tout $x \in [1;15]$: $g'(x) = -0,6 - e^{-x+5}$.

Au total: $g'(x) = -0,6 - e^{-x+5}$.

1. b. Déduisons-en que g est décroissante sur $[1;15]$:

g est décroissante sur $[1;15]$ ssi: pour tout $x \in [1;15]$, $g'(x) \leqslant 0$.

$g'(x) \leqslant 0$ ssi: $-0,6 - e^{-x+5} \leqslant 0$

cad ssi: $e^{-x+5} \geqslant -0,6$ (a).

Or (a) est toujours vérifié car: pour tout $x \in [1;15]$, $e^{-x+5} > 0$.

Au total: g est décroissante sur $[1;15]$.

2. a. Dressons le tableau de variation de g sur $[1;15]$:

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	1		15
g'		$-$	
g	a	$\searrow$	b

Avec: • $a = g(1)$ => $a = 3,4 + e^{4} > 0$,

• $b = g(15)$ => $b = -5 + e^{-10} < 0$.

Au total: • Nous venons de dresser le tableau de variation de g sur $[1;15]$.

• Arrondies à l'unité: $g(1) \approx 58$ et $g(15) \approx -5$.

2. b. Donnons la solution unique de l'équation $g(x) = 0$ dans l'intervalle $[1;15]$:

Comme g est strictement décroissante sur $[1;15]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution appartenant à $[1;15]$.

Soit α, cette solution unique: $\alpha \in [6;7]$.

Par tâtonnement, on trouve, comme valeur arrondie de α à 10^{-1} près: $\alpha \approx 6,9$.

Au total, l'équation $g(x)$ admet comme solution unique dans l'intervalle $[1;15]$:

$$\alpha \approx 6,9.$$

2. c. **Déduisons-en le tableau de signe de $g(x)$ sur $[1;15]$:**

Nous avons le tableau de signes de g suivant:

x	1		α		15
g		$+$	0	$-$	

Partie C: Application économique

1. **Montrons que pour tout réel $x \in [1;15]$, $D(x) = -0,3x^2 + 4x - e^{-x+5}$:**

Nous savons que: $D(x) = R(x) - C(x)$.

Par conséquent: $D(x) = 3x - (0,3x^2 - x + e^{-x+5})$

$$\Rightarrow D(x) = -0,3x^2 + 4x - e^{-x+5}.$$

Au total, nous avons bien: $D(x) = -0,3x^2 + 4x - e^{-x+5}$.

2. **Montrons que $D'(x) = g(x)$, pour tout réel $x \in [1;15]$:**

D'après l'énoncé, D est dérivable sur $[1;15]$.

Ainsi, nous pouvons calculer D' pour tout $x \in [1;15]$.

Pour tout $x \in [1;15]$: $D'(x) = -0,6x + 4 + e^{-x+5}$ => $D'(x) = g(x)$.

Au total: pour tout réel $x \in [1;15]$, $D'(x) = g(x)$.

3. Déduisons-en le tableau de variation de D sur [1;15]:

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	1		$\alpha = 6,9$		15
D'		+	0	−	
D	a	↗	b	↘	c

Avec: • $a = D(1)$ => $a \approx -50,90$,

• $b = D(6,9)$ => $b \approx 13,17$,

• $c = D(15)$ => $c \approx -7,50$.

Au total, nous venons de dresser le tableau de variation de D sur [1;15].

4. a. Déterminons la quantité de granulés pour que le bénéfice soit maximal:

La fonction D admet un maximum au point: $M(\alpha;D(\alpha))$.

Avec: $\alpha = 6,9$ tonnes de granulés, l'entreprise dégagera un bénéfice maximal.

4. b. Déterminons ce bénéfice maximal:

Soit D_{max}, ce bénéfice maximal, $D_{max} = D(6,9)$.

Or: $D(6,9) \approx 13,17$ à 10^{-2} près.

Au total, le bénéfice maximal dégagé par l'entreprise est de: 13170 €.