

EXERCICE 2

[Inde, 2015]

1. a. Recopions et complétons le tableau:

Le tableau complété est le suivant:

Test $C < 400$	—	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux
Valeur de C	300	326	350	372	392	411	*
Valeur de n	0	1	2	3	4	5	

* : car comme $411 < 400$ est faux, on s'arrête là et l'algorithme affiche donc $n = 5$.

1. b. Déterminons la valeur affichée à la fin de l'exécution et interprétons:

- La valeur affichée à la fin de l'exécution est: $n = 5$.
- Cela signifie qu'au cours de l'année 2019, $2014 + 5$, le nombre de colonies d'abeilles de l'apiculteur dépassera 400 unités.

2. a. Exprimons, pour tout entier naturel n , C_{n+1} , en fonction de C_n :

- D'après l'énoncé, $C_0 = 300$ colonies.
- De plus, chaque année l'apiculteur perd 8% des colonies pendant l'hiver et installe 50 nouvelles colonies chaque printemps.

Soient: • C_{n+1} , une estimation du nombre de colonies pendant l'année

$$2014 + (n+1),$$

- C_n , une estimation du nombre de colonies pendant l'année

$$2014 + (n).$$

Pour tout entier naturel n , l'estimation " C_{n+1} " est égale à l'estimation " C_n " diminuée de 8% et augmentée de "50 nouvelles colonies d'abeilles".

Donc pour tout entier naturel n :

$$C_{n+1} = C_n - 8\% C_n + 50 \iff C_{n+1} = 0,92 C_n + 50.$$

2. b. Montrons que pour tout nombre entier n , $V_{n+1} = 0,92 V_n$:

$$\begin{aligned} V_n = 625 - C_n &\iff V_{n+1} = 625 - C_{n+1} \\ &\iff V_{n+1} = 625 - (0,92 C_n + 50) \quad (1). \end{aligned}$$

$$\text{Or: } V_0 = 625 - C_0 \implies V_0 = 325 \text{ et } C_n = 625 - V_n.$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi: } (1) &\iff V_{n+1} = 625 - (0,92 [625 - V_n] + 50) \\ &\implies V_{n+1} = 0,92 V_n. \end{aligned}$$

Par conséquent, (V_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,92$ et de premier terme $V_0 = 325$.

2. c. Déduisons-en que pour tout entier naturel n , on a $C_n = 625 - 325 \times (0,92)^n$:

• Comme $V_{n+1} = 0,92 V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$V_n = V_0 \times (0,92)^n, \text{ avec: } V_0 = 325.$$

• Par ailleurs, nous savons que:
 * $V_n = 325 \times (0,92)^n$
 * $C_n = 625 - V_n$

$$\text{D'où: } C_n = 625 - 325 \times (0,92)^n.$$

2. d. Nombre de colonies espéré en juillet 2024:

Il s'agit de calculer: C_{10} .

$$C_{10} = 625 - 325 \times (0,92)^{10} \implies C_{10} = 484.$$

Ainsi, l'apiculteur possédera environ 484 colonies d'abeilles en juillet 2024.

3. a. Déterminons comment modifier l'algorithme:

Doubler signifie: passer de 300 à 600 colonies.

Il suffit de mettre comme nouvelle ligne L_5 :

L'_5 Tant que $C < 600$ faire

3. b. Donnons une réponse à la question de l'apiculteur:

Déterminer le nombre d'années pour atteindre 600 colonies d'abeilles revient à résoudre l'inéquation: $C_n \geq 600$.

$$C_n \geq 600 \Leftrightarrow 625 - 325 \times (0,92)^n \geq 600$$

$$\Leftrightarrow 325 \times (0,92)^n \leq 25$$

$$\Leftrightarrow (0,92)^n \leq \frac{1}{13}$$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,92) \leq -\ln(13)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{-\ln(13)}{\ln(0,92)} \quad \text{car: } 0,92 \in]0, 1[, \text{ et donc: } \ln(0,92) < 0$$

$$\Rightarrow n \geq 30,7.$$

Nous prendrons $n = 31$ ans car n est un entier naturel.

Donc l'apiculteur devra attendre 31 ans, à savoir 2045, pour voir son nombre de colonies doubler.