

# Corrigé

## Exercice 2



---

---

freemaths.fr

---

---

# LES MATHÉMATIQUES

## AU BACCALAURÉAT ES

### MATRICES ET SUITES, BAC ES

- Graphe probabiliste
- Ordre d'un graphe
- Graphe connexe
- Graphe complet
- Sommets
- Arêtes
- Matrice de transition
- Matrice d'adjacence
- Chaîne eulérienne
- Cycle eulérien
- Théorème d'Euler
- État stable
- Algorithme de Dijkstra

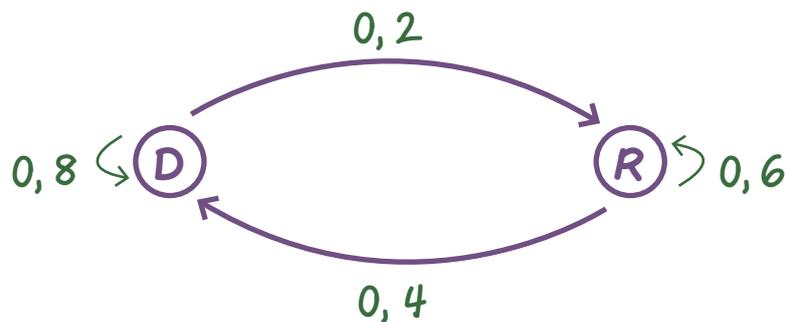
## EXERCICE 2

[ France Métropolitaine 2019 ]

1. a. Représentons cette situation par un graphe probabiliste:

- Soient:
- D, l'état: " Julie emprunte les routes départementales ",
  - R, l'état: " Julie emprunte la voie rapide ".

Le graphe probabiliste G est le suivant:



1. b. Donnons la matrice de transition M de ce graphe:

La matrice associée à ce graphe probabiliste ou matrice de transition M est:

$$M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

2. a. Donnons  $P_i$ :

$$P_i = (d_i, r_i).$$

Or d'après l'énoncé: " le premier jour, Julie emprunte la voie rapide ".

D'où:  $r_1 = 1$ , et par conséquent  $d_1 = 0$  (car  $r_1 + d_1 = 1$ ).

Ainsi:  $P_1 = (0 \ 1)$ .

2. b. b1. Calculons  $M^2$ :

$$M^2 = M \times M \Leftrightarrow M^2 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow M^2 = \begin{pmatrix} 0,72 & 0,28 \\ 0,56 & 0,44 \end{pmatrix}.$$

Ainsi:  $M^2 = \begin{pmatrix} 0,72 & 0,28 \\ 0,56 & 0,44 \end{pmatrix}.$

2. b. b2. Déduisons-en la probabilité que Julie emprunte les routes départementales le 3<sup>e</sup> jour:

Il s'agit ici de calculer  $d_3$ .

Pour cela, nous allons calculer:  $P_3 = (d_3 \ r_3)$ .

D'après le cours:  $P_3 = P_1 \times M^{(3-1)}$  **cad**  $P_3 = P_1 \times M^2$ .

Or:  $P_1 = (0 \ 1)$  et  $M^2 = \begin{pmatrix} 0,72 & 0,28 \\ 0,56 & 0,44 \end{pmatrix}.$

D'où:  $P_3 = (0 \ 1) \times \begin{pmatrix} 0,72 & 0,28 \\ 0,56 & 0,44 \end{pmatrix}$

$$= (0,56 \ 0,44).$$

D'où:  $d_3 = 0,56$ .

Au total: il y a 56% de chance pour que Julie emprunte les routes départementales, le 3<sup>e</sup> jour.

3. a. a1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , exprimons  $P_{n+1}$  en fonction de  $P_n$ :

D'après le cours, nous savons que pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $P_{n+1}$  en fonction de  $P_n$  s'écrit:  $P_{n+1} = P_n \times M$ .

$$P_{n+1} = P_n \times M \Leftrightarrow (d_{n+1} \quad r_{n+1}) = (d_n \quad r_n) \times M.$$

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ :  $P_{n+1} = P_n \times M$ .

3. a. a2. Déduisons-en  $d_{n+1}$  et  $r_{n+1}$  en fonction de  $d_n$  et  $r_n$ :

$$P_{n+1} = P_n \times M \Leftrightarrow (d_{n+1} \quad r_{n+1}) = (d_n \quad r_n) \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d_{n+1} = 0,8d_n + 0,4r_n \\ r_{n+1} = 0,2d_n + 0,6r_n \end{cases}.$$

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ :  $\begin{cases} d_{n+1} = 0,8d_n + 0,4r_n \\ r_{n+1} = 0,2d_n + 0,6r_n \end{cases}$ .

3. b. Quel algorithme choisir ?

Nous choisissons l'algorithme: 3 car c'est le seul qui permet le calcul de  $d_3$  et  $r_3$ .

4. Montrons que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $r_{n+1} = 0,4r_n + 0,2$ :

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ :  $d_n + r_n = 1$  ce qui revient à dire  $d_n = 1 - r_n$ .

$$\begin{aligned} \text{D'où: } r_{n+1} = 0,2d_n + 0,6r_n &\Leftrightarrow r_{n+1} = 0,2(1 - r_n) + 0,6r_n \\ &\Leftrightarrow r_{n+1} = 0,4r_n + 0,2. \end{aligned}$$

Ainsi pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , nous avons bien:  $r_{n+1} = 0,4r_n + 0,2$ .

5. a. Montrons que  $(V_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme:

$$\begin{aligned} V_n = r_n - \frac{1}{3} &\Leftrightarrow V_{n+1} = r_{n+1} - \frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow V_{n+1} = (0,4r_n + 0,2) - \frac{1}{3} \quad (1). \end{aligned}$$

$$\text{Or: } V_1 = r_1 - \frac{1}{3} \Rightarrow V_1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ et } r_n = V_n + \frac{1}{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi: } (1) &\Leftrightarrow V_{n+1} = (0,4[V_n + \frac{1}{3}] + 0,2) - \frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow V_{n+1} = 0,4V_n. \end{aligned}$$

Par conséquent,  $(V_n)$  est une suite géométrique de raison  $q = 0,4$  et de premier terme  $V_1 = \frac{2}{3}$ .

5. b. Exprimons  $V_n$  en fonction de  $n$  et montrons que pour tout entier naturel

$$\text{non nul } n, r_n = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} \times 0,4^n.$$

Comme  $V_{n+1} = 0,4V_n$ , d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$V_n = V_1 \times (0,4)^{(n-1)} \iff V_n = \frac{2}{3} \times (0,4)^{(n-1)}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\text{De plus: } r_n = V_n + \frac{1}{3}.$$

$$\text{D'où: } r_n = \frac{2}{3} \times (0,4)^{(n-1)} + \frac{1}{3} \text{ cad } r_n = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} \times (0,4)^n.$$

$$(\text{car: } \frac{2}{3} \times (0,4)^{(n-1)} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{0,4} \times (0,4)^n = \frac{2}{3} \times \frac{5}{2} \times (0,4)^n)$$

$$\text{Au total, pour tout entier naturel } n \text{ non nul, nous avons bien: } r_n = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} \times (0,4)^n.$$

5. c. Que peut-on prévoir à long terme ?

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} + \frac{5}{3} \times (0,4)^n$$

$$= \frac{1}{3} \text{ car: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{3} \times (0,4)^n = 0, \text{ car: } 0,4 \in ]0; 1[.$$

Ainsi, à long terme, il y a une chance sur trois pour que Julie emprunte la voie rapide.