Corrigé

Exercice 2

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2017

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SUJET

EPREUVE DU MERCREDI 21 JUIN 2017

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 7

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 7 pages, y compris celle-ci.

Exercice 2 (5 points)

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A

Dans un jeu vidéo, une suite d'énigmes est proposée au joueur. Ces énigmes sont classées en deux catégories : les énigmes de catégorie A sont les énigmes faciles ; les énigmes de catégorie B sont les énigmes difficiles.

Le choix des énigmes successives est aléatoire et vérifie les conditions suivantes :

- la première énigme est facile ;
- si une énigme est facile, la probabilité que la suivante soit difficile est égale à 0,15 ;
- si une énigme est difficile, la probabilité que la suivante soit facile est égale à 0,1.

Pour $n \geq 1$, on note :

- a_n la probabilité que l'énigme numéro n soit facile (de catégorie A) ;
- b_n la probabilité que l'énigme numéro n soit difficile (de catégorie B) ;
- $P_n = (a_n \;\; b_n)$ l'état probabiliste pour l'énigme numéro n.

1. Donner la matrice P_1.

2. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.

3. Écrire la matrice M associée à ce graphe, puis donner la matrice ligne P_2.

4. Sachant que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $a_n + b_n = 1$, montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $a_{n+1} = 0{,}75\, a_n + 0{,}1$.

5. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose $v_n = a_n - 0{,}4$.

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. Exprimer v_n en fonction de n, puis montrer que pour tout entier $n \geq 1$:

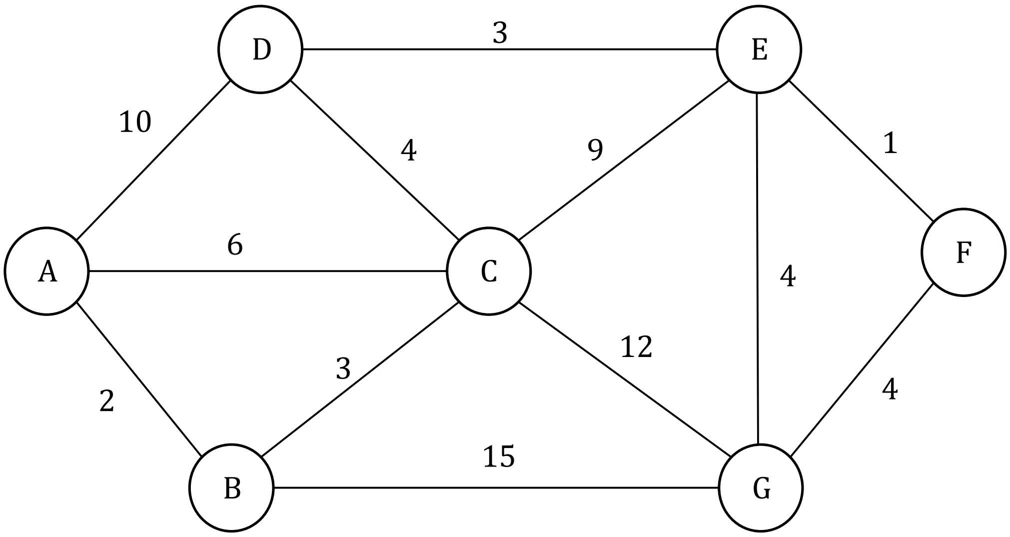
$$a_n = 0{,}8 \times 0{,}75^n + 0{,}4.$$

c. Préciser la limite de la suite (v_n).

d. Une revue spécialisée dans les jeux vidéo indique que plus le joueur évolue dans le jeu plus il risque d'avoir à résoudre des énigmes difficiles. Que penser de cette analyse ?

PARTIE B

Une des énigmes consiste à réaliser un parcours en le minimum de temps. Le graphe suivant schématise le parcours. L'étiquette de chaque arête indique le temps de parcours en minute entre les deux sommets qu'elle relie. Par exemple, le temps de parcours de C vers D, ou de D à C, est égal à quatre minutes.



Quel chemin le joueur doit-il prendre pour aller de A à G en minimisant son temps de parcours ? Expliquer la démarche utilisée.

EXERCICE 2

[France Métropolitaine 2017]

Partie A:

1. Donnons la matrice P_1:

L'état probabiliste pour l'énigme numéro 1 est: $P_1 = (a_1 \quad b_1)$ cad $P_1 = (1 \quad 0)$.

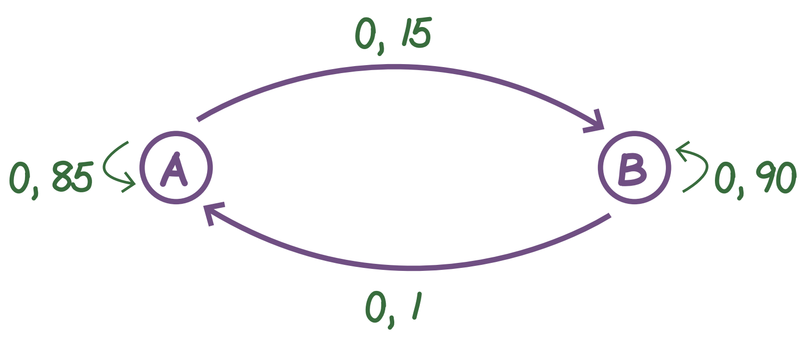
Ainsi: $P_1 = (1 \quad 0)$.

2. Traduisons les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets A et B:

Soient: • A, l'état: " l'énigme est facile ",

• B, l'état: " l'énigme est difficile ".

Le graphe probabiliste G est le suivant:



3. a. Ecrivons la matrice M associée à ce graphe:

La matrice associée au graphe probabiliste ou matrice de transition M est:

$$M = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,1 & 0,90 \end{pmatrix}.$$

3. b. Déterminons P_2:

D'après le cours: $P_2 = P_1 \times M^{(2-1)}$ cad $P_2 = P_1 \times M$.

$$P_2 = P_1 \times M \iff P_2 = (1 \quad 0) \times \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,1 & 0,90 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P_2 = (0,85 \quad 0,15).$$

D'où: $a_2 = 0,85$ et $b_2 = 0,15$.

Au total: $P_2 = (0,85 \quad 0,15)$.

4. Montrons que pour tout entier $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = 0,75\, a_n + 0,1$:

D'après le cours, nous savons que, pour tout entier $n \geqslant 1$, P_{n+1} en fonction de P_n s'écrit: $P_{n+1} = P_n \times M$.

$$P_{n+1} = P_n \times M \iff (a_{n+1} \quad b_{n+1}) = (a_n \quad b_n) \times \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,1 & 0,90 \end{pmatrix}$$

$$\iff (a_{n+1} \quad b_{n+1}) = (0,85a_n + 0,1b_n \quad 0,15a_n + 0,90b_n)$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = 0,85a_n + 0,1b_n. \quad (a)$$

Or, d'après l'énoncé: $a_n + b_n = 1$, pour tout entier $n \geqslant 1$.

Dans ces conditions: $(a) \iff a_{n+1} = 0,85a_n + 0,1(1 - a_n)$

$$\Rightarrow a_{n+1} = 0,75a_n + 0,1.$$

Au total, pour tout entier $n \geqslant 1$: $a_{n+1} = 0,75a_n + 0,1$.

5. a. Montrons que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison:

$V_n = a_n - 0,4 \iff V_{n+1} = a_{n+1} - 0,4$, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\Longleftrightarrow \quad V_{n+1} = (0,75\,a_n + 0,1) - 0,4 \quad (1).$$

Or: $V_1 = a_1 - 0,4 \Rightarrow V_1 = 0,6$ et $a_n = V_n + 0,4$.

Ainsi: $(1) \Longleftrightarrow V_{n+1} = (0,75\,[V_n + 0,4] + 0,1) - 0,4$

$$\Rightarrow \quad V_{n+1} = 0,75\,V_n, \text{ pour tout entier } n \geqslant 1.$$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,75$ et de premier terme $V_1 = 0,6$.

5. b. b1. Exprimons V_n en fonction de n:

Comme $V_{n+1} = 0,75\,V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$V_n = V_1 \times (0,75)^{n-1}, \quad \text{avec:} \quad V_1 = 0,6.$$

En d'autres termes: $V_n = 0,6 \times (0,75)^{n-1}$, pour tout $n \geqslant 1$.

5. b. b2. Montrons que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $a_n = 0,8 \times (0,75)^n + 0,4$:

Nous savons que: * $V_n = 0,6 \times (0,75)^{n-1}$

* $a_n = V_n + 0,4$.

D'où: $a_n = 0,6 \times (0,75)^{n-1} + 0,4$ cad: $a_n = \dfrac{0,6}{0,75} \times (0,75)^n + 0,4$.

Au total, nous avons bien pour tout entier $n \geqslant 1$: $a_n = 0,8 \times (0,75)^n + 0,4$.

5. c. Précisons la limite de la suite (V_n):

$$\lim_{n \to +\infty} V_n = \lim_{n \to +\infty} 0,6 \times (0,75)^{n-1}$$

$$= 0 \quad \text{car:} \quad \lim_{n \to +\infty} (0,75)^{n-1} = 0, \quad \text{car:} \quad 0,75 \in]0,1[.$$

Donc la suite (V_n) est convergente et converge vers " 0 ".

5. d. Que pensons-nous de cette analyse ?

Nous savons que: $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$ (question précédente).

Dans ces conditions:

- $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0,4$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0,6$, car: $a_n + b_n = 1$.

Ainsi: plus le joueur évolue dans le jeu ($n \to +\infty$), plus il risque d'avoir à résoudre des énigmes difficiles (**60% de chance**).

Donc: *oui*, cette analyse nous semble bonne.

Partie B:

Déterminons le chemin que doit prendre le joueur pour aller de A à G, tout en minimisant son temps de parcours:

Après recours à l'algorithme de **Dijkstra**, nous trouvons comme trajet le plus rapide (minimisation du temps de parcours) pour aller de A à G:

le trajet A - B - C - D - E - G.

Et ce trajet durera: $2 + 3 + 4 + 3 + 4 = 16$ minutes.

Au total, le trajet le plus rapide pour aller de A à G est:

A - B - C - D - E - G, et il durera 16 minutes.