EXERCICE 2 – 5 points

Afin de se préparer à courir des marathons, Hugo aimerait effectuer quotidiennement un footing à compter du 1er janvier 2014.

On admet que :
- Si Hugo court un jour donné, la probabilité qu'il ne coure pas le lendemain est de 0,2 ;
- s'il ne court pas un jour donné, la probabilité qu'il ne coure pas le lendemain est de 0,4.

On note C l'état « Hugo court » et R l'état « Hugo ne court pas ».

Pour tout entier naturel n, on note :
- c_n la probabilité de l'événement « Hugo court le $(n+1)$-ième jour » ;
- r_n la probabilité de l'événement « Hugo ne court pas le $(n+1)$-ième jour » ;
- P_n la matrice $(c_n \quad r_n)$ correspondant à l'état probabiliste le $(n+1)$-ième jour.

Le 1er janvier 2014, motivé, le jeune homme court.
On a donc : $P_0 = (c_0 \quad r_0) = (1 \quad 0)$.

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets C et R.

2. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

3. On donne $M^6 = \begin{pmatrix} 0{,}750016 & 0{,}249984 \\ 0{,}749952 & 0{,}250048 \end{pmatrix}$.
   Quel calcul matriciel permet de déterminer la probabilité c_6 qu'Hugo coure le 7e jour ? Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de c_6.

4.
   a. Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $c_{n+1} = 0{,}2c_n + 0{,}6$.

5. Pour tout entier naturel n, on considère la suite (v_n) définie par $v_n = c_n - 0{,}75$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,2. Préciser le premier terme.
   b. Exprimer v_n en fonction de n.
   Déterminer la limite de la suite (v_n).
   c. Justifier que, pour tout entier naturel n, $c_n = 0{,}75 + 0{,}25 \times 0{,}2^n$.
   d. Que peut-on conjecturer concernant la probabilité qu'Hugo coure le 29 décembre 2014 ?
   e. Conjecturer alors l'état stable de ce graphe.
   Comment valider votre conjecture ?

EXERCICE 2

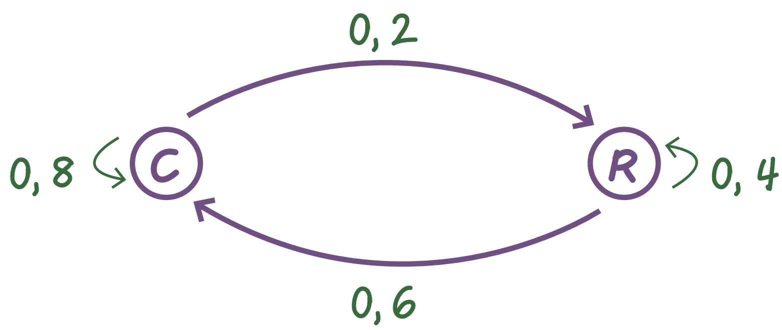
[France Métropolitaine 2016]

1. Traduisons les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets C et R:

Soient: • C, l'état: " Hugo court ",

• R, l'état: " Hugo ne court pas ".

Le graphe probabiliste G est le suivant:



2. Ecrivons la matrice de transition M de ce graphe, en respectant l'ordre alphabétique des sommets:

La matrice associée au graphe probabiliste ou matrice de transition M est:

$$M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

3. a. Déterminons le calcul matriciel qui permet de déterminer la probabilité c_6 qu'Hugo coure le 7e jour:

Soient: M la matrice de transition du graphe probabiliste à 2 sommets (C et R), P_0 la matrice ligne décrivant l'état initial et P_6 l'état probabiliste à l'état $n = 6$.

Nous avons: $P_6 = P_0 \times M^6$, avec $P_0 = (c_0 \quad r_0) = (1 \quad 0)$.

Dans ces conditions: $P_6 = (1 \quad 0) \times \begin{pmatrix} 0,750016 & 0,249984 \\ 0,749952 & 0,250048 \end{pmatrix}$

cad: $P_6 = (0,750016 \quad 0,249984)$.

Au total, le calcul matriciel qui permet de déterminer la probabilité c_6 est:

$$P_6 = (1 \quad 0) \times M^6.$$

3. b. Déterminons une valeur approchée à 10^{-2} près de c_6:

Nous savons que: $P_6 = (0,750016 \quad 0,249984)$.

Ainsi, à 10^{-2} près: $c_6 \approx 0,75$.

4. a. Exprimons P_{n+1} en fonction de P_n:

D'après le cours: pour tout n de IN, $P_{n+1} = P_n \times M$.

Au total, P_{n+1} en fonction de P_n s'écrit: $P_{n+1} = P_n \times M$.

4. b. Montrons que, pour tout entier naturel n, $c_{n+1} = 0,2c_n + 0,6$:

Nous savons que: $P_{n+1} = P_n \times M$.

D'où: $(c_{n+1} \quad r_{n+1}) = (c_n \quad r_n) \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$

<=> $(c_{n+1} \quad r_{n+1}) = (0,8c_n + 0,6r_n \quad 0,2c_n + 0,4r_n)$

=> $c_{n+1} = 0,8c_n + 0,6r_n$. (a)

Or, d'après le cours: $c_n + r_n = 1$, pour tout entier naturel n.

Dans ces conditions: $(a) \iff c_{n+1} = 0,8\, c_n + 0,6\,(1 - c_n)$, car $r_n = 1 - c_n$

$$\Rightarrow \quad c_{n+1} = 0,2\, c_n + 0,6.$$

Au total, pour tout entier naturel n, nous avons: $c_{n+1} = 0,2\, c_n + 0,6$.

5. a. Montrons que la suite (V_n) est géométrique et déterminons V_0 et q:

$V_n = c_n - 0,75 \iff V_{n+1} = c_{n+1} - 0,75$

$$\iff V_{n+1} = (0,2\, c_n + 0,6) - 0,75 \quad (1).$$

Or: $V_0 = c_0 - 0,75 \Rightarrow V_0 = 0,25$ et $c_n = V_n + 0,75$.

Ainsi: $(1) \iff V_{n+1} = (0,2\,[V_n + 0,75] + 0,6) - 0,75$

$$\Rightarrow \quad V_{n+1} = 0,2\, V_n.$$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,2$ et de premier terme $V_0 = 0,25$.

5. b. b1. Exprimons V_n en fonction de n:

Comme $V_{n+1} = 0,2\, V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$V_n = V_0 \times (0,2)^n, \quad \text{avec:} \quad V_0 = 0,25.$$

En d'autres termes: $V_n = 0,25 \times (0,2)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. b. b2. Déterminons la limite de la suite (V_n):

$$\lim_{n \to +\infty} V_n = \lim_{n \to +\infty} 0,25 \times (0,2)^n$$

$$= 0 \quad \text{car:} \quad \lim_{n \to +\infty} (0,2)^n = 0, \quad \text{car:} \quad 0,2 \in \,]0, 1[.$$

Donc la suite (V_n) est convergente et converge vers " 0 ".

5. c. Justifions que, pour tout entier naturel n, $c_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^n$:

Nous savons que: $*$ $V_n = 0,25 \times (0,2)^n$

$*$ $c_n = V_n + 0,75$.

D'où: $c_n = 0,25 \times (0,2)^n + 0,75$ ou $c_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^n$.

5. d. Que pouvons-nous conjecturer concernant la probabilité qu'Hugo coure le 29/12/14 ?

Nous savons que: • $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$ et • $c_n = V_n + 0,75$.

Ainsi: $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = \lim\limits_{n \to +\infty} V_n + 0,75$

$= 0 + 0,75$

$= 0,75$.

Donc la suite (c_n) est convergente et converge vers " 0, 75 ".

Comme ici " n " est très grand ($n > 360$), la probabilité qu'Hugo coure le 29 décembre 2014 est d'environ 0, 75 cad 75%.

5. e. Conjecturons alors l'état stable de ce graphe:

Soit $P = (0,75 \quad 1 - 0,75) = (0,75 \quad 0,25)$.

L'état de P_n à l'étape n converge vers P un état stable indépendant de l'état initial P_0.

P correspond à l'état stable de ce graphe.

De plus, d'après le cours, nous savons que l'état stable P est l'unique solution de l'équation $P = P \times M$.

Ici: $P \times M = (0,75 \quad 0,25)\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$

<=> $P \times M = (0,75 \quad 0,25)$

=> $P \times M = P$.

Au total, nous venons de vérifier que l'état stable de ce graphe est bien:

$$P = (0,75 \quad 0,25).$$