

# Corrigé

## Exercice 2



---

---

freemaths.fr

---

---

# **BACCALAURÉAT GÉNÉRAL**

**Session 2016**

---

**MATHÉMATIQUES – Série ES**

**ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ**

---

## **SUJET**

**Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 7**

**L'usage de la calculatrice est autorisé.**

**Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.**

**Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.**

**Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).**

**Le sujet comporte 5 pages, y compris celle-ci.**

## EXERCICE 2 – 5 points

Afin de se préparer à courir des marathons, Hugo aimerait effectuer quotidiennement un footing à compter du 1<sup>er</sup> janvier 2014.

On admet que :

- Si Hugo court un jour donné, la probabilité qu'il ne coure pas le lendemain est de 0,2 ;
- s'il ne court pas un jour donné, la probabilité qu'il ne coure pas le lendemain est de 0,4.

On note C l'état « Hugo court » et R l'état « Hugo ne court pas ».

Pour tout entier naturel  $n$ , on note :

- $c_n$  la probabilité de l'événement « Hugo court le  $(n + 1)$ -ième jour » ;
- $r_n$  la probabilité de l'événement « Hugo ne court pas le  $(n + 1)$ -ième jour » ;
- $P_n$  la matrice  $(c_n \ r_n)$  correspondant à l'état probabiliste le  $(n + 1)$ -ième jour.

Le 1<sup>er</sup> janvier 2014, motivé, le jeune homme court.

On a donc :  $P_0 = (c_0 \ r_0) = (1 \ 0)$ .

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets C et R.
2. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
3. On donne  $M^6 = \begin{pmatrix} 0,750016 & 0,249984 \\ 0,749952 & 0,250048 \end{pmatrix}$ .  
Quel calcul matriciel permet de déterminer la probabilité  $c_6$  qu'Hugo coure le 7<sup>e</sup> jour ?  
Déterminer une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de  $c_6$ .
4.
  - a. Exprimer  $P_{n+1}$  en fonction de  $P_n$ .
  - b. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $c_{n+1} = 0,2c_n + 0,6$ .
5. Pour tout entier naturel  $n$ , on considère la suite  $(v_n)$  définie par  $v_n = c_n - 0,75$ .
  - a. Montrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 0,2. Préciser le premier terme.
  - b. Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .  
Déterminer la limite de la suite  $(v_n)$ .
  - c. Justifier que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $c_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^n$ .
  - d. Que peut-on conjecturer concernant la probabilité qu'Hugo coure le 29 décembre 2014 ?
  - e. Conjecturer alors l'état stable de ce graphe.  
Comment valider votre conjecture ?

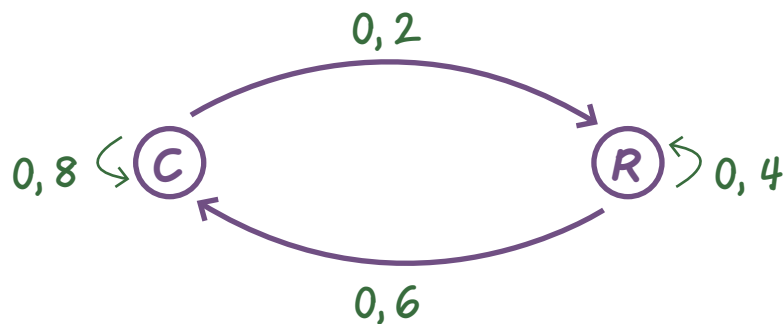
## EXERCICE 2

[ France Métropolitaine 2016 ]

1. Traduisons les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets C et R:

- Soient:
- C, l'état: " Hugo court ",
  - R, l'état: " Hugo ne court pas ".

Le graphe probabiliste G est le suivant:



2. Ecrivons la matrice de transition M de ce graphe, en respectant l'ordre alphabétique des sommets:

La matrice associée au graphe probabiliste ou matrice de transition M est:

$$M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

3. a. Déterminons le calcul matriciel qui permet de déterminer la probabilité  $c_6$  qu'Hugo coure le 7<sup>e</sup> jour:

Soient: M la matrice de transition du graphe probabiliste à 2 sommets (C et R),  $P_0$  la matrice ligne décrivant l'état initial et  $P_6$  l'état probabiliste à l'état  $n = 6$ .

Nous avons:  $P_6 = P_0 \times M^6$ , avec  $P_0 = (c_0 \ r_0) = (1 \ 0)$ .

Dans ces conditions:  $P_6 = (1 \ 0) \times \begin{pmatrix} 0,750016 & 0,249984 \\ 0,749952 & 0,250048 \end{pmatrix}$

cad:  $P_6 = (0,750016 \ 0,249984)$ .

Au total, le calcul matriciel qui permet de déterminer la probabilité  $c_6$  est:

$$P_6 = (1 \ 0) \times M^6.$$

**3. b. Déterminons une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de  $c_6$ :**

Nous savons que:  $P_6 = (0,750016 \ 0,249984)$ .

Ainsi, à  $10^{-2}$  près:  $c_6 \approx 0,75$ .

**4. a. Exprimons  $P_{n+1}$  en fonction de  $P_n$ :**

D'après le cours: pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $P_{n+1} = P_n \times M$ .

Au total,  $P_{n+1}$  en fonction de  $P_n$  s'écrit:  $P_{n+1} = P_n \times M$ .

**4. b. Montrons que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $c_{n+1} = 0,2c_n + 0,6$ :**

Nous savons que:  $P_{n+1} = P_n \times M$ .

$$\text{D'où: } (c_{n+1} \ r_{n+1}) = (c_n \ r_n) \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (c_{n+1} \ r_{n+1}) = (0,8c_n + 0,6r_n \ 0,2c_n + 0,4r_n)$$

$$\Rightarrow c_{n+1} = 0,8c_n + 0,6r_n. \quad (a)$$

Or, d'après le cours:  $c_n + r_n = 1$ , pour tout entier naturel  $n$ .

Dans ces conditions: (a)  $\Leftrightarrow c_{n+1} = 0,8 c_n + 0,6 (1 - c_n)$ , car  $r_n = 1 - c_n$   
 $\Rightarrow c_{n+1} = 0,2 c_n + 0,6$ .

Au total, pour tout entier naturel  $n$ , nous avons:  $c_{n+1} = 0,2 c_n + 0,6$ .

5. a. Montrons que la suite  $(V_n)$  est géométrique et déterminons  $V_0$  et  $q$ :

$$V_n = c_n - 0,75 \Leftrightarrow V_{n+1} = c_{n+1} - 0,75$$

$$\Leftrightarrow V_{n+1} = (0,2 c_n + 0,6) - 0,75 \quad (1).$$

Or:  $V_0 = c_0 - 0,75 \Rightarrow V_0 = 0,25$  et  $c_n = V_n + 0,75$ .

Ainsi: (1)  $\Leftrightarrow V_{n+1} = (0,2 [V_n + 0,75] + 0,6) - 0,75$   
 $\Rightarrow V_{n+1} = 0,2 V_n$ .

Par conséquent,  $(V_n)$  est bien une suite géométrique de raison  $q = 0,2$  et de premier terme  $V_0 = 0,25$ .

5. b. b1. Exprimons  $V_n$  en fonction de  $n$ :

Comme  $V_{n+1} = 0,2 V_n$ , d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$V_n = V_0 \times (0,2)^n, \text{ avec: } V_0 = 0,25.$$

En d'autres termes:  $V_n = 0,25 \times (0,2)^n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

5. b. b2. Déterminons la limite de la suite  $(V_n)$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,25 \times (0,2)^n$$

$$= 0 \text{ car: } \lim_{n \rightarrow +\infty} (0,2)^n = 0, \text{ car: } 0,2 \in ]0, 1[.$$

Donc la suite  $(V_n)$  est convergente et converge vers " 0 ".

5. c. Justifions que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $c_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^n$ :

Nous savons que: \*  $V_n = 0,25 \times (0,2)^n$

$$* c_n = V_n + 0,75.$$

D'où:  $c_n = 0,25 \times (0,2)^n + 0,75$  ou  $c_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^n$ .

5. d. Que pouvons-nous conjecturer concernant la probabilité qu'Hugo coure le 29/12/14 ?

Nous savons que: •  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$  et •  $c_n = V_n + 0,75$ .

$$\text{Ainsi: } \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n + 0,75$$

$$= 0 + 0,75$$

$$= 0,75.$$

Donc la suite  $(c_n)$  est convergente et converge vers " 0,75 ".

Comme ici "  $n$  " est très grand ( $n > 360$ ), la probabilité qu'Hugo coure le 29 décembre 2014 est d'environ 0,75 cad 75%.

5. e. Conjecturons alors l'état stable de ce graphe:

$$\text{Soit } P = (0,75 \quad 1 - 0,75) = (0,75 \quad 0,25).$$

L'état de  $P_n$  à l'étape  $n$  converge vers  $P$  un état stable indépendant de l'état initial  $P_0$ .

$P$  correspond à l'état stable de ce graphe.

De plus, d'après le cours, nous savons que l'état stable  $P$  est l'unique solution de l'équation  $P = P \times M$ .

$$\text{Ici: } P \times M = (0,75 \quad 0,25) \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow P \times M = (0,75 \quad 0,25)$$

$$\Rightarrow P \times M = P.$$

*Au total, nous venons de vérifier que l'état stable de ce graphe est bien:*

$$P = (0,75 \quad 0,25).$$