EXERCICE 4

[France Métropolitaine 2016]

Partie A: Étude Graphique

1. Déterminons $f'(1,5)$:

D'après l'énoncé, f est définie et dérivable sur $[0,5;6]$.

De plus, les points A et B sont sur la courbe (C), avec: A $(1;3)$ et B $(1,5;?)$.

Enfin, au point B, la tangente à la courbe (C) est horizontale ; d'où: $f'(x_B) = 0$.

Ainsi, comme $1,5 \in [0,5;6]$, f est dérivable en $x = 1,5$ et:

$$f'(1,5) = 0 \quad \text{car:} \quad x_B = 1,5.$$

Au total: $f'(1,5) = 0$.

2. Déterminons l'équation de la tangente:

La tangente à la courbe (C) au point A passe par le point A' $(0;2)$.

Soit $y = a.x + b$, l'équation de cette tangente.

" a " est le coefficient directeur et est tel que:

$$a = \frac{y_{A'} - y_A}{x_{A'} - x_A} \iff a = \frac{2 - 3}{0 - 1} \Rightarrow a = 1.$$

Ainsi, nous pouvons écrire: $y = x + b$. (1)

Or, la tangente passe par le point A' (0 ; 2).

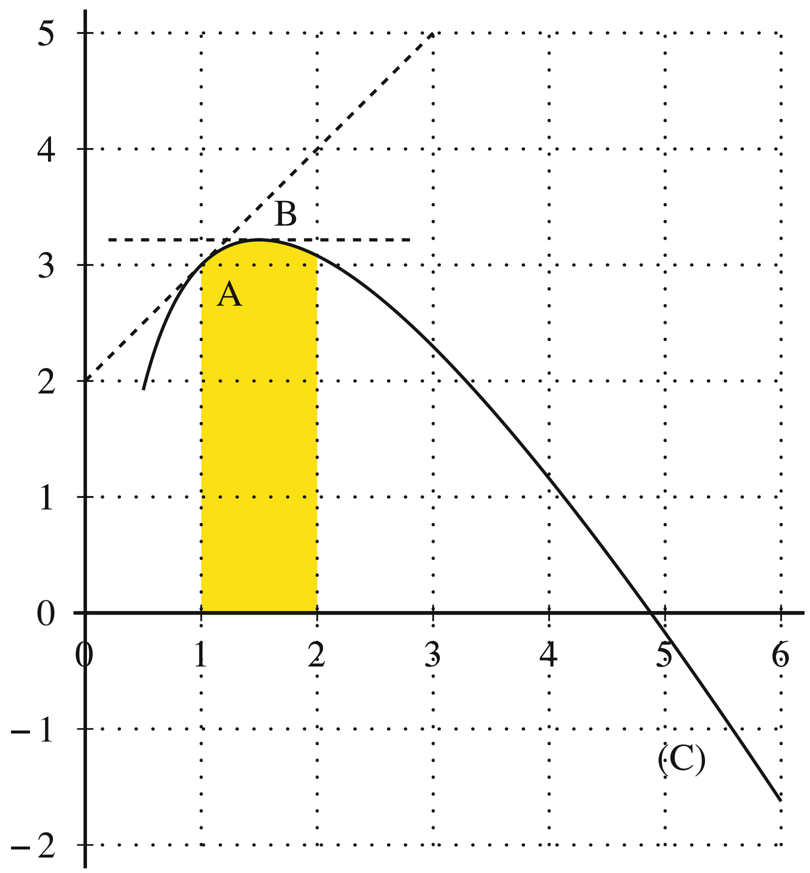
D'où : (1) <=> $2 = 1 \times 0 + b$ => $b = 2$.

Au total, l'équation de la tangente à la courbe (C) au point A, qui passe par le point A', est : $y = x + 2$.

3. Donnons un encadrement de l'aire demandée :

En unités d'aire et à l'unité près, l'aire $\mathscr{A}$ du domaine compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$, est telle que : $3 < \mathscr{A} < 4$.

Nous pouvons représenter cette aire $\mathscr{A}$, en jaune, sur le graphique suivant :



Au total, l'aire demandée $\mathscr{A}$ est telle que : $3 < \mathscr{A} < 4$.

4. Déterminons la convexité de la fonction f sur $[0,5;6]$:

Ici la courbe est située en dessous des tangentes en chacun de ses points.

Dans ces conditions, nous pouvons affirmer que:

f est concave sur l'intervalle $[0,5;6]$.

Au total: f est concave sur $[0,5;6]$.

Partie B: Étude Analytique

1. a. Pour tout réel de $[0,5;6]$, calculons $f'(x)$:

Ici:
- $f(x) = -2x + 5 + 3\ln x$
- $Df = [0,5;6]$.

Posons: $f = f_1 + 3f_2$, avec: $f_1(x) = -2x + 5$ et $f_2(x) = \ln x$.

f_1 est dérivable sur IR comme fonction polynôme, donc dérivable sur $[0,5;6]$.

f_2 est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme fonction " ln ", donc dérivable sur $[0,5;6]$.

Par conséquent, f est dérivable sur $[0,5;6]$ comme somme de 2 fonctions dérivables sur $[0,5;6]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [0,5;6]$.

Pour tout $x \in [0,5;6]$: $f'(x) = -2 + \dfrac{3}{x}$.

Au total: $f'(x) = -2 + \dfrac{3}{x}$.

1. b. Montrons que $f'(x) = \dfrac{-2x+3}{x}$:

Nous savons que: $f'(x) = -2 + \dfrac{3}{x}$.

Ainsi, en réduisant au même dénominateur: $f'(x) = \dfrac{-2x+3}{x}$.

Au total, nous avons bien: $f'(x) = \dfrac{-2x+3}{x}$.

2. a. Étudions le signe de f' sur $[0,5;6]$:

Nous allons distinguer 3 cas, pour tout x de $[0,5;6]$:

- **1er cas**: $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0$ ssi $-2x + 3 = 0$, cad: $x = \dfrac{3}{2}$.

- **2eme cas**: $f'(x) < 0$.

$f'(x) < 0$ ssi $-2x + 3 < 0$, cad: $x > \dfrac{3}{2}$.

- **3eme cas**: $f'(x) > 0$.

$f'(x) > 0$ ssi $-2x + 3 > 0$, cad: $x < \dfrac{3}{2}$.

Au total: • f est croissante sur $[0,5;\dfrac{3}{2}]$,

(car sur $[0,5;\dfrac{3}{2}]$, $f'(x) \geq 0$)

• f est décroissante sur $[\dfrac{3}{2};6]$.

(car sur $[\dfrac{3}{2};6]$, $f'(x) \leq 0$)

2. b. Dressons le tableau de variation de f sur $[0,5;6]$:

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	$0,5$		$\frac{3}{2}$		6
f'		$+$	0	$-$	
f	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec: • $a = f(0,5) \Rightarrow a = 4 + 3\ln(0,5) > 0,$

• $b = f\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow b = 2 + 3\ln\left(\frac{3}{2}\right) > 0,$

• $c = f(6) \Rightarrow c = -7 + 3\ln(6) < 0.$

Au total, nous venons de dresser le tableau de variation de f sur $[0,5;6]$.

3. a. Montrons que $f(x) = 0$ admet exactement une solution α sur $[0,5;6]$:

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

• Soit f une fonction continue sur $[a;b]$.

Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a;b]$ tel que: $f(c) = K$.

Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à $[a;b]$.

• Si de plus, la fonction f est strictement " croissante " ou " décroissante " sur $[a;b]$, l'équation $f(x) = K$ admet une unique solution appartenant à $[a;b]$.

Ici: • f est continue sur $[a;b] = [0,5;6]$.

• " $k = 0$ " est compris entre: $f(c) = f(6) = -7 + 3\ln(6)$

et: $f(b) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 2 + 3\ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

• f est strictement décroissante sur $]\frac{3}{2};6]$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $f(x) = 0$ ($k = 0$) admet une unique solution appartenant à $[0,5;6]$ et plus exactement à $]\frac{3}{2};6]$.

Au total: $f(x) = 0$ admet exactement une unique solution α sur $[0,5;6]$.

3. b. Donnons une valeur approchée de α à 10^{-2} près:

À l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $\alpha \approx 4,87$.

Au total, une valeur approchée de α à 10^{-2} près est: $\alpha \approx 4,87$.

4. Déduisons-en le tableau de signe de f sur $[0,5;6]$:

Nous avons le tableau de signe de f suivant:

x	$0,5$		α		6
f		$+$	0	$-$	

5. a. Montrons que F est une primitive de f sur $[0,5;6]$:

$F(x) = -x^2 + 2x + 3x\ln(x)$.

Ici: f est continue sur $[0,5;6]$. Elle admet donc une primitive F dérivable sur l'intervalle $[0,5;6]$ et F est telle que: $F' = f$.

Pour tout $x \in [0,5;6]$, $F'(x) = -2x + 2 + 3\ln(x) + 3x \times \left(\frac{1}{x}\right)$

=> $F'(x) = -2x + 5 + 3\ln(x)$.

Au total, on a bien pour tout $x \in [0,5;6]$: F est une primitive de f car $F' = f$.

5. b. Déduisons-en l'aire exacte arrondie au dixième:

Ici, il s'agit de calculer: $I = \int_1^2 f(x)dx$.

f est continue sur $[1;2]$, elle admet donc des primitives sur $[1;2]$ et par conséquent: I existe.

$I = \int_1^2 (-2x + 5 + 3\ln(x))dx$

$I = [-x^2 + 2x + 3x\ln(x)]_1^2$ => $I = 6\ln(2) - 1$.

En arrondissant au dixième, nous obtenons: $I \approx 3,2$.

Au total, l'aire exacte demandée est: $I = 6\ln(2) - 1$ ou $I \approx 3,2$.