Corrigé

Exercice 4

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2016

MATHÉMATIQUES – Série ES
ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 5

MATHÉMATIQUES – Série L
ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 4

SUJET

L'usage de la calculatrice est autorisé.

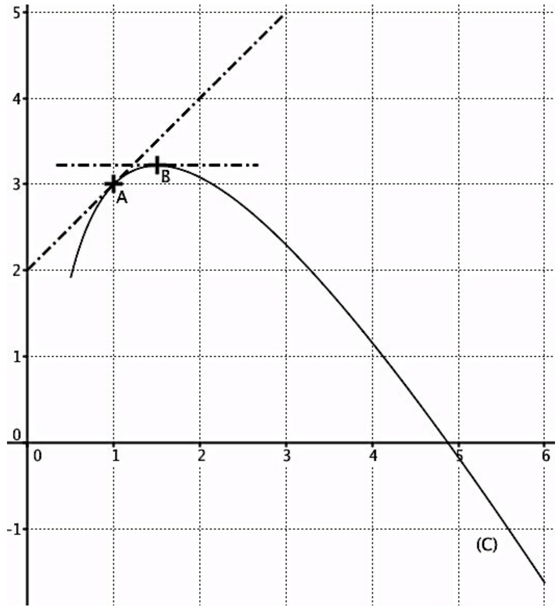
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 5 pages, y compris celle-ci.

EXERCICE 4 – 6 points

La courbe (C) ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et dérivable sur [0,5 ; 6]. Les points A(1 ; 3) et B d'abscisse 1,5 sont sur la courbe (C).
Les tangentes à la courbe (C) aux points A et B sont aussi représentées en pointillés sur ce graphique, la tangente au point B est horizontale.
On note f' la fonction dérivée de f.



Les PARTIES A et B sont indépendantes.

PARTIE A : ÉTUDE GRAPHIQUE

1. Déterminer $f'(1,5)$.
2. La tangente à la courbe (C) au point A passe par le point de coordonnées (0 ; 2). Déterminer une équation de cette tangente.
3. Donner un encadrement de l'aire, en unités d'aire et à l'unité près, du domaine compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.
4. Déterminer la convexité de la fonction f sur [0,5 ; 6]. Argumenter la réponse.

PARTIE B : ÉTUDE ANALYTIQUE

On admet que la fonction f est définie sur [0,5 ; 6] par $f(x) = -2x + 5 + 3\ln(x)$.

1. Pour tout réel x de $[0{,}5\ ;\ 6]$, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{-2x+3}{x}$.
2. Étudier le signe de f' sur [0,5 ; 6] puis dresser le tableau de variation de f sur [0,5 ; 6].
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution α sur [0,5 ; 6].

   Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
4. En déduire le tableau de signe de f sur [0,5 ; 6].
5. On considère la fonction F définie sur [0,5 ; 6] par $F(x) = -x^2 + 2x + 3x\ln(x)$.
   a. Montrer que F est une primitive de f sur [0,5 ; 6].
   b. En déduire l'aire exacte, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$. En donner ensuite une valeur arrondie au dixième.

EXERCICE 4

[France Métropolitaine 2016]

Partie A: Étude Graphique

1. Déterminons $f'(1,5)$:

D'après l'énoncé, f est définie et dérivable sur $[0,5;6]$.

De plus, les points A et B sont sur la courbe (C), avec: A (1;3) et B (1,5;?).

Enfin, au point B, la tangente à la courbe (C) est horizontale ; d'où: $f'(x_B) = 0$.

Ainsi, comme $1,5 \in [0,5;6]$, f est dérivable en $x = 1,5$ et:

$$f'(1,5) = 0 \quad \text{car:} \quad x_B = 1,5.$$

Au total: $f'(1,5) = 0$.

2. Déterminons l'équation de la tangente:

La tangente à la courbe (C) au point A passe par le point A' (0;2).

Soit $y = a.x + b$, l'équation de cette tangente.

" a " est le coefficient directeur et est tel que:

$$a = \frac{y_{A'} - y_A}{x_{A'} - x_A} \iff a = \frac{2 - 3}{0 - 1} \Rightarrow a = 1.$$

Ainsi, nous pouvons écrire: $y = x + b$. (1)

Or, la tangente passe par le point A'$(0;2)$.

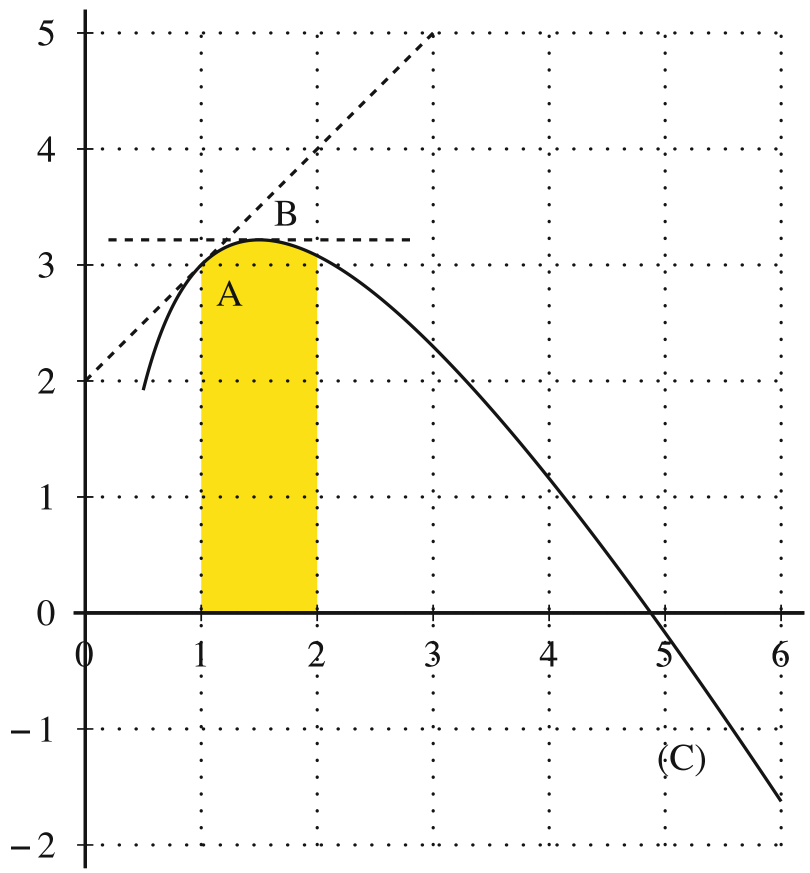
D'où: (1) <=> $2 = 1 \times 0 + b$ => $b = 2$.

Au total, l'équation de la tangente à la courbe (C) au point A, qui passe par le point A', est: $y = x + 2$.

3. Donnons un encadrement de l'aire demandée:

En unités d'aire et à l'unité près, l'aire $\mathscr{A}$ du domaine compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$, est telle que: $3 < \mathscr{A} < 4$.

Nous pouvons représenter cette aire $\mathscr{A}$, en jaune, sur le graphique suivant:



Au total, l'aire demandée $\mathscr{A}$ est telle que: $3 < \mathscr{A} < 4$.

4. Déterminons la convexité de la fonction f sur $[0,5;6]$:

Ici la courbe est située en dessous des tangentes en chacun de ses points.

Dans ces conditions, nous pouvons affirmer que:

f est concave sur l'intervalle $[0,5;6]$.

Au total: f est concave sur $[0,5;6]$.

Partie B: Étude Analytique

1. a. Pour tout réel de $[0,5;6]$, calculons $f'(x)$:

Ici: • $f(x) = -2x + 5 + 3\ln x$

• $Df = [0,5;6]$.

Posons: $f = f_1 + 3f_2$, avec: $f_1(x) = -2x + 5$ et $f_2(x) = \ln x$.

f_1 est dérivable sur IR comme fonction polynôme, donc dérivable sur $[0,5;6]$.

f_2 est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme fonction " ln ", donc dérivable sur $[0,5;6]$.

Par conséquent, f est dérivable sur $[0,5;6]$ comme somme de 2 fonctions dérivables sur $[0,5;6]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [0,5;6]$.

Pour tout $x \in [0,5;6]$: $f'(x) = -2 + \frac{3}{x}$.

Au total: $f'(x) = -2 + \frac{3}{x}$.

1. b. Montrons que $f'(x) = \dfrac{-2x+3}{x}$:

Nous savons que: $f'(x) = -2 + \dfrac{3}{x}$.

Ainsi, en réduisant au même dénominateur: $f'(x) = \dfrac{-2x+3}{x}$.

Au total, nous avons bien: $f'(x) = \dfrac{-2x+3}{x}$.

2. a. Étudions le signe de f' sur $[0,5;6]$:

Nous allons distinguer 3 cas, pour tout x de $[0,5;6]$:

- **1^er cas**: $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0$ ssi $-2x+3 = 0$, cad: $x = \dfrac{3}{2}$.

- **2^eme cas**: $f'(x) < 0$.

$f'(x) < 0$ ssi $-2x+3 < 0$, cad: $x > \dfrac{3}{2}$.

- **3^eme cas**: $f'(x) > 0$.

$f'(x) > 0$ ssi $-2x+3 > 0$, cad: $x < \dfrac{3}{2}$.

Au total: • f est croissante sur $[0,5;\dfrac{3}{2}]$,

(car sur $[0,5;\dfrac{3}{2}]$, $f'(x) \geqslant 0$)

• f est décroissante sur $[\dfrac{3}{2};6]$.

(car sur $[\dfrac{3}{2};6]$, $f'(x) \leqslant 0$)

2. b. Dressons le tableau de variation de f sur $[0,5;6]$:

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	$0,5$		$\frac{3}{2}$		6
f'		$+$	0	$-$	
f	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec: • $a = f(0,5) \Rightarrow a = 4 + 3\ln(0,5) > 0$,

• $b = f\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow b = 2 + 3\ln\left(\frac{3}{2}\right) > 0$,

• $c = f(6) \Rightarrow c = -7 + 3\ln(6) < 0$.

Au total, nous venons de dresser le tableau de variation de f sur $[0,5;6]$.

3. a. Montrons que $f(x) = 0$ admet exactement une solution α sur $[0,5;6]$:

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

• Soit f une fonction continue sur $[a;b]$.

Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a;b]$ tel que: $f(c) = K$.

Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à $[a;b]$.

• Si de plus, la fonction f est strictement " croissante " ou " décroissante " sur $[a;b]$, l'équation $f(x) = K$ admet une unique solution appartenant à $[a;b]$.

Ici: • f est continue sur $[a;b] = [0,5;6]$.

• " $k = 0$ " est compris entre: $f(c) = f(6) = -7 + 3\ln(6)$

et: $f(b) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 2 + 3\ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

• f est strictement décroissante sur $]\frac{3}{2};6]$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $f(x) = 0$ $(k = 0)$ admet une unique solution appartenant à $[0,5;6]$ et plus exactement à $]\frac{3}{2};6]$.

Au total: $f(x) = 0$ admet exactement une unique solution α sur $[0,5;6]$.

3. b. Donnons une valeur approchée de α à 10^{-2} près:

À l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $\alpha \approx 4,87$.

Au total, une valeur approchée de α à 10^{-2} près est: $\alpha \approx 4,87$.

4. Déduisons-en le tableau de signe de f sur $[0,5;6]$:

Nous avons le tableau de signe de f suivant:

x	$0,5$		α		6
f		$+$	0	$-$	

5. a. Montrons que F est une primitive de f sur $[0,5;6]$:

$F(x) = -x^2 + 2x + 3x\ln(x)$.

Ici: f est continue sur $[0,5;6]$. Elle admet donc une primitive F dérivable sur l'intervalle $[0,5;6]$ et F est telle que: $F' = f$.

Pour tout $x \in [0,5;6]$, $F'(x) = -2x + 2 + 3\ln(x) + 3x \times \left(\frac{1}{x}\right)$

=> $F'(x) = -2x + 5 + 3\ln(x)$.

Au total, on a bien pour tout $x \in [0,5;6]$: F est une primitive de f car $F' = f$.

5. b. Déduisons-en l'aire exacte arrondie au dixième:

Ici, il s'agit de calculer: $I = \int_1^2 f(x)dx$.

f est continue sur $[1;2]$, elle admet donc des primitives sur $[1;2]$ et par conséquent: I existe.

$I = \int_1^2 (-2x + 5 + 3\ln(x))dx$

$I = [-x^2 + 2x + 3x\ln(x)]_1^2$ => $I = 6\ln(2) - 1$.

En arrondissant au dixième, nous obtenons: $I \approx 3,2$.

Au total, l'aire exacte demandée est: $I = 6\ln(2) - 1$ ou $I \approx 3,2$.