

EXERCICE 3

[France Métropolitaine 2016]

Partie A: Le téléphone portable

1. Calculons $P(R)$:

D'après l'énoncé, nous avons:

- $R =$ " la chanson écoutée est une chanson de la catégorie rock ".
- $F =$ " la chanson écoutée est interprétée en Français ".
- Nombre total de chansons: 3200.
- Nombre de chansons dans la catégorie rock: 960.

Dans ces conditions:

$$P(R) = \frac{960}{3200} \Rightarrow P(R) = 30\%$$

Au total, il y a 30% de chance pour que la chanson écoutée soit une chanson de la catégorie rock.

2. Traduisons cette donnée en utilisant R et F :

35% des chansons de la catégorie rock sont interprétées en français.

En traduisant cette donnée, nous pouvons écrire en utilisant R et F :

$$P_R(F) = 0.35.$$

3. Calculons la probabilité que la chanson écoutée soit une chanson de la catégorie rock et qu'elle soit interprétée en français:

Cela revient à calculer: $P(R \cap F)$.

$$\text{Nous savons que: } P_R(F) = \frac{P(R \cap F)}{P(R)}$$

$$\Rightarrow P(R \cap F) = P_R(F) \times P(R).$$

$$\text{Ainsi: } P(R \cap F) = 0.35 \times 0.3 \Rightarrow P(R \cap F) = 0.105.$$

Au total, il y a 10.5% de chance pour que la chanson soit de la catégorie rock et soit interprétée en français.

4. Montrons que $P(F \cap \bar{R}) = 0.28$:

L'événement $F = (R \cap F) \cup (\bar{R} \cap F)$.

$$\text{D'où: } P(F) = P(R \cap F) + P(\bar{R} \cap F)$$

$$\Rightarrow P(F \cap \bar{R}) = P(F) - P(R \cap F).$$

$$\text{Ainsi: } P(F \cap \bar{R}) = 38.5\% - 10.5\% \Rightarrow P(F \cap \bar{R}) = 0.28.$$

Au total, il y a 28% de chance pour que la chanson soit interprétée en français et ne soit pas de la catégorie rock.

5. Déduisons et interprétons $P_{\bar{R}}(F)$:

$$P_{\bar{R}}(F) = \frac{P(F \cap \bar{R})}{P(\bar{R})} \Leftrightarrow P_{\bar{R}}(F) = \frac{P(F \cap \bar{R})}{1 - P(R)}$$

$$\text{Ainsi: } P_{\bar{R}}(F) = \frac{28\%}{1 - 30\%} \Rightarrow P_{\bar{R}}(F) = 0.4.$$

Au total, cela signifie que: 40% des chansons, qui n'appartiennent pas à la catégorie rock, sont interprétées en français.

EXERCICE 3

[France Métropolitaine 2016]

Partie B: La durée de l'écoute de musique

1. Déterminons la probabilité que la durée de cette écoute soit comprise entre 15 et 45 minutes:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X est la variable aléatoire qui correspond à la durée de chaque écoute musique (en mn).
- X suit la loi normale d'espérance $\mu = 30$ et d'écart type $\sigma = 10$.
- T suit la loi normale centrée réduite.

Il s'agit de calculer: $P(15 \leq X \leq 45)$.

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$P(15 \leq X \leq 45) \approx 0,8666.$$

Au total, la probabilité que la durée de cette écoute soit comprise entre 15 et 45 minutes est de: 86,60%.

2. Déterminons la probabilité que cette écoute dure plus d'1 heure:

Il s'agit de calculer: $P(X \geq 60)$. (1 heure = 60 minutes)

$$\begin{aligned} P(X \geq 60) &= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \geq \frac{60 - 30}{10}\right) \\ &= P(T \geq 3) \end{aligned}$$

$$= 1 - P(T \leq 3).$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$P(X \geq 60) = 0,1\%.$$

Au total, la probabilité que cette écoute dure plus d'une heure est de:

$$0,1\%.$$