

Corrigé

Exercice 2



freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2016

MATHÉMATIQUES – Série ES ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 5

MATHÉMATIQUES – Série L ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 4

SUJET

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 5 pages, y compris celle-ci.

EXERCICE 2 – 5 points

Un loueur de voitures dispose au 1^{er} mars 2015 d'un total de 10 000 voitures pour l'Europe.

Afin d'entretenir son parc automobile, il décide de revendre, au 1^{er} mars de chaque année, 25% de son parc et d'acheter 3 000 voitures neuves.

On modélise le nombre de voitures de l'agence à l'aide d'une suite :

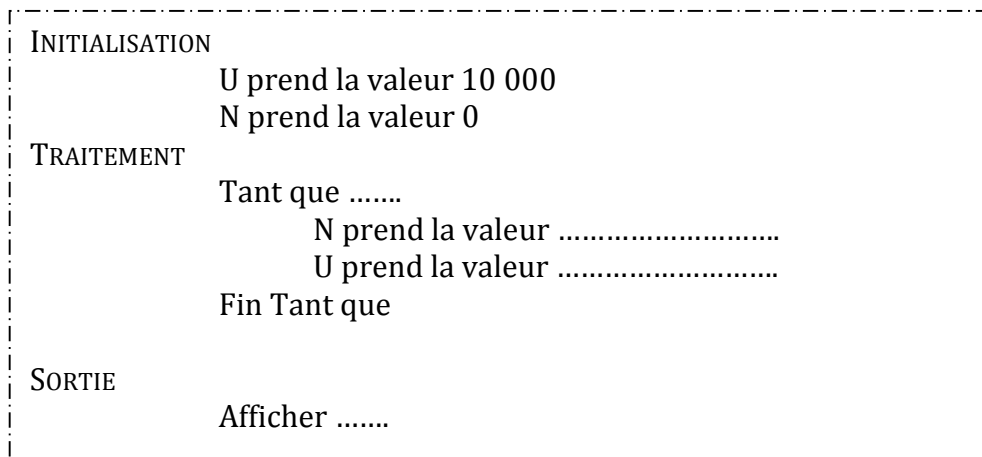
Pour tout entier naturel n , on note u_n le nombre de voitures présentes dans le parc automobile au 1^{er} mars de l'année 2015 + n .

On a donc $u_0 = 10\,000$.

1. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,75u_n + 3\,000$.

2. Pour tout entier naturel n , on considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 12\,000$.
 - a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75. Préciser le premier terme.
 - b. Exprimer v_n en fonction de n .
Déterminer la limite de la suite (v_n) .
 - c. Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_n = 12\,000 - 2\,000 \times 0,75^n$.
 - d. En vous appuyant sur les réponses données aux deux questions précédentes, que pouvez-vous conjecturer sur le nombre de voitures que comptera le parc automobile de ce loueur au bout d'un grand nombre d'années ?

3. On admet dans cette question que la suite (u_n) est croissante.
On aimerait déterminer l'année à partir de laquelle le parc automobile comptera au moins 11 950 voitures.
 - a. Recopier l'algorithme suivant et compléter les pointillés afin qu'il permette de répondre au problème posé.



- b. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année recherchée.
- c. Retrouver ce résultat en résolvant l'inéquation $12\,000 - 2\,000 \times 0,75^n \geq 11\,950$.

EXERCICE 2

[France Métropolitaine 2016]

1. Expliquons pourquoi pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = 0,75 U_n + 3000$:

- D'après l'énoncé, au 1^{er} mars 2015, le loueur de voitures dispose de 10000 voitures pour l'Europe.

D'où: $U_0 = 10000$.

- De plus, chaque année leur nombre baisse de 25% et augmente de 3000 nouvelles voitures neuves.

Soient:

- U_{n+1} , le nombre de voitures au 1^{er} mars (2015 + (n + 1)),
- U_n , le nombre de voitures au 1^{er} mars (2015 + (n)).

Pour tout entier naturel n , le nombre U_{n+1} de voitures est égal au nombre U_n de voitures diminué de 25% et augmenté de 3000 " nouvelles voitures neuves. "

Donc pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = U_n - 25\% U_n + 3000 \iff U_{n+1} = 0,75 U_n + 3000.$$

2. a. Montrons que la suite (V_n) est géométrique et déterminons V_0 et q :

$$V_n = U_n - 12000 \iff V_{n+1} = U_{n+1} - 12000$$

$$\iff V_{n+1} = (0,75 U_n + 3000) - 12000 \quad (1).$$

$$\text{Or: } V_0 = U_0 - 12\,000 \Rightarrow V_0 = -2\,000 \text{ et } U_n = V_n + 12\,000.$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi: } (1) &\Leftrightarrow V_{n+1} = (0,75[V_n + 12\,000] + 3\,000) - 12\,000 \\ &\Rightarrow V_{n+1} = 0,75 V_n. \end{aligned}$$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,75$ et de premier terme $V_0 = -2\,000$.

2. b. b1. Exprimons V_n en fonction de n :

Comme $V_{n+1} = 0,75 V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$V_n = V_0 \times (0,75)^n, \text{ avec: } V_0 = -2\,000.$$

En d'autres termes: $V_n = -2\,000 \times (0,75)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. b. b2. Déterminons la limite de la suite (V_n) :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} -2\,000 \times (0,75)^n \\ &= 0 \text{ car: } \lim_{n \rightarrow +\infty} (0,75)^n = 0, \text{ car: } 0,75 \in]0, 1[. \end{aligned}$$

Donc la suite (V_n) est convergente et converge vers "0".

2. c. Justifions que, pour tout entier naturel n , $U_n = 12\,000 - 2\,000 \times (0,75)^n$:

$$\text{Nous savons que: } * V_n = -2\,000 \times (0,75)^n$$

$$* U_n = V_n + 12\,000.$$

$$\text{D'où: } U_n = 12\,000 - 2\,000 \times (0,75)^n.$$

2. d. Que pouvons-nous conjecturer au bout d'un grand nombre d'années cad quand n tend vers $+\infty$?

$$\text{Nous savons que: } \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0 \text{ et } \bullet U_n = 12\,000 - V_n.$$

$$\text{Ainsi: } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 12\,000 - V_n$$

$$= 12\,000 - 0$$

$$= 12\,000 \text{ voitures présentes dans le parc.}$$

Donc la suite (U_n) est convergente et converge vers " 12 000 " voitures.

Cela signifie qu'au bout de n années (" n " très grand), le nombre de voitures présentes dans le parc tendra vers 12 000.

3. a. Complétons l'algorithme afin qu'il permette de répondre au problème:

L'algorithme complété est le suivant:

Initialisation:

...

...

Traitement:

Tant que $U < 11\,950$ faire

N prend la valeur $N + 1$

U prend la valeur $0,75 U + 3\,000$

Fin du Tant que

Sortie:

Afficher N

3. b. Déterminons l'année recherchée:

A l'aide d'une machine à calculer, nous obtenons:

$$2015 + 13, \text{ cad: } 2028.$$

En effet: $U_{13} \approx 11952 > 11950$.

En définitive, en 2028, le parc automobile comptera au moins 11950 voitures.

3. c. Résolvons l'inéquation $12\,000 - 2\,000 \times (0,75)^n \geq 11\,950$:

$$12\,000 - 2\,000 \times (0,75)^n \geq 11\,950$$

$$\Leftrightarrow -2\,000 \times (0,75)^n \geq -50$$

$$\Leftrightarrow 2\,000 \times (0,75)^n \leq 50$$

$$\Leftrightarrow (0,75)^n \leq \frac{5}{200}$$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,75) \leq \ln\left(\frac{1}{40}\right)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{1}{40}\right)}{\ln(0,75)}, \quad \text{car: } 0,75 \in]0, 1[, \quad \text{et donc: } \ln(0,75) < 0$$

$$\Rightarrow n \geq 13, \quad \text{car } n \text{ est un entier naturel.}$$

Au total, nous retrouvons la même réponse qu'à la question précédente, à savoir: l'année 2028 (2015 + 13 ans).