EXERCICE 1

[France Métropolitaine 2015]

Partie A: Femmes et achat

1. Construisons un arbre pondéré:

D'après l'énoncé, nous avons:

- F = " la personne est une femme ".
- $\overline{F}$ = " la personne est un homme ".
- R = " la personne repart sans rien acheter ".
- $\overline{R}$ = " la personne effectue un achat ".

- $P(F) = 0.42$
- $P(\overline{F}) = 0.58$

$(0.42 + 0.58 = 1)$.

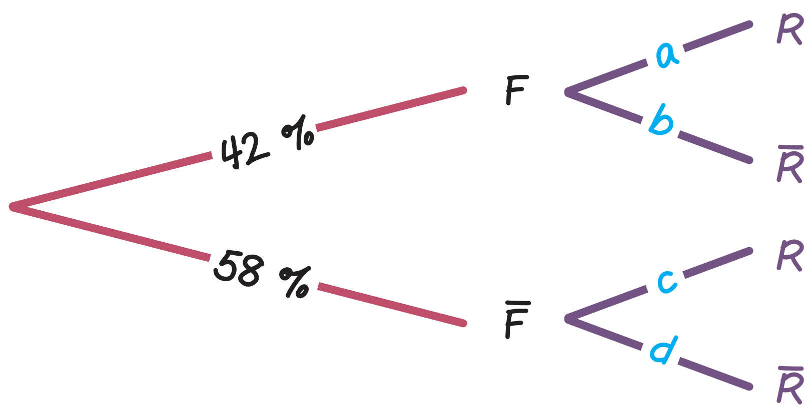
- $P_F(R) = 0.65$
- $P_F(\overline{R}) = 0.35$

$(0.65 + 0.35 = 1)$.

- $P_{\overline{F}}(R) = 0.45$
- $P_{\overline{F}}(\overline{R}) = 0.55$

$(0.45 + 0.55 = 1)$.

D'où l'arbre pondéré suivant:



, avec:

- $a = 0.65$
- $b = 0.35$
- $c = 0.45$
- $d = 0.55$

2. Calculons la probabilité que la personne soit une femme et qu'elle reparte sans rien acheter:

Cela revient à calculer: $P(F \cap R)$.

$P(F \cap R) = P_F(R) \times P(F)$.

Ainsi: $P(F \cap R) = 0.65 \times 0.42 \Rightarrow P(F \cap R) \approx 0.273$.

Au total, il y a 27.3% de chance pour que la personne qui entre dans le magasin soit une femme et n'achète rien du tout.

3. Montrons que $P(R) = 0.534$:

L'événement $R = (R \cap F) \cup (R \cap \overline{F})$.

D'où: $P(R) = P(R \cap F) + P(R \cap \overline{F})$

$= P_F(R) \times P(F) + P_{\overline{F}}(R) \times P(\overline{F})$.

Ainsi: $P(R) = 0.65 \times 0.42 + 0.45 \times 0.58 \Rightarrow P(R) \approx 0.534$.

Au total, il y a 53.4% de chance pour que la personne reparte sans rien acheter.

EXERCICE 1

[France Métropolitaine 2015]

Partie B: Le téléphone de type T1

1. Justifions que $P(X \geq 36) \approx 0,885$:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X est la variable aléatoire qui à chaque téléphone, de type T1 prélevé au hasard, associe sa durée de vie (en mois).
- X suit la loi normale d'espérance $\mu = 48$ et d'écart type $\sigma = 10$.
- T suit la loi normale centrée réduite.

Il s'agit de calculer: $P(X \geq 36)$.

$$P(X \geq 36) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \geq \frac{36 - 48}{10}\right)$$

$$= P(T \geq -1,2)$$

$$= 1 - P(T \leq -1,2)$$

$$= P(T \leq 1,2).$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$P(X \geq 36) \approx 0,885.$$

Au total, la probabilité que le téléphone de type T1 fonctionne plus de 3 ans (36 mois) est de: 88,5%.

2. Déterminons la probabilité que le téléphone de type T1 fonctionne moins de 5 ans sachant qu'il a fonctionné plus de 3 ans:

Cela revient à calculer: $\dfrac{P(36 \leqslant X \leqslant 60)}{P(X \geqslant 36)}$. **(5 ans = 60 mois)**

Nous savons déjà que: $P(X \geqslant 36) \approx 0,885$.

De plus à l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$P(36 \leqslant X \leqslant 60) \approx 0,77.$$

Ainsi: $\dfrac{P(36 \leqslant X \leqslant 60)}{P(X \geqslant 36)} \approx 0,87$.

Au total, la probabilité demandée est de: 87%.

Partie C: Achat uniquement d'accessoires

1. Déterminons l'intervalle de fluctuation asymptotique:

Ici, nous avons:
- $n = 1500$
- $p = 30\%$ (par hypothèse)
- $f = \dfrac{430}{1500} \Rightarrow f \approx 28,7\%$.

Dans ces conditions:

$n = 1500 \geqslant 30$, $n \cdot p = 450 \geqslant 5$ et $n \cdot (1 - p) = 1050 \geqslant 5$.

Les conditions sont donc réunies et le gérant du magasin émet l'hypothèse que 30% des personnes venant au magasin achètent uniquement des accessoires.

On choisit un échantillon aléatoire de 1500 personnes parmi les clients.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% s'écrit:

$$I = \left[p - 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right].$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $I = [\, 27,6\% ; 32,3\% \,]$.

2. Doit-on rejeter au seuil de 5% l'hypothèse du gérant:

La fréquence de personnes " f " ayant uniquement acheté des accessoires, sur l'échantillon, est telle que:

$$f \approx 28,7\% \in I.$$

Ainsi, l'hypothèse formulée par le gérant est bonne au seuil de 5%.

Il ne faut donc pas la rejeter.