EXERCICE 2

[France Métropolitaine 2015]

1. a. Calculons U_3:

Il s'agit de calculer U_3.

$U_3 = 2000 \times (1,008)^{3-1}$ <=> $U_3 = 2000 \times (1,008)^2$

=> $U_3 = 2032,13$ €.

Ainsi, le forage entre 20 et 30 mètres coûte: 2032,13 €.

1. b. Déterminons le coût total de forage des 30 premiers mètres:

Soit C_3, le coût total des 30 premiers mètres.

$C_3 = U_1 + U_2 + U_3$ => $C_3 = 6048,13$ €.

Au total, le coût total de forage des 30 premiers mètres est de: 6048,13 €.

2. a. a1. Exprimons U_{n+1} en fonction de U_n:

$U_{n+1} = 2000 \times (1,008)^n$ et $U_n = 2000 \times (1,008)^{n-1}$,

par conséquent: $U_{n+1} = 1,008 \times U_n$.

Au total, pour tout entier naturel n: $U_{n+1} = 1,008 \times U_n$.

2. a. a2. Précisons le nature (U_n):

Ici: (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,008$ et de premier terme $U_1 = 2000$.

2. b. Déduisons-en le pourcentage demandé:

Il s'agit de calculer: $\left(\dfrac{U_{n+1} - U_n}{U_n}\right) \times 100$.

Or: $$\frac{U_{n+1} - U_n}{U_n} = \frac{2000 \times (1,008)^n - 2000 \times (1,008)^{n-1}}{2000 \times (1,008)^{n-1}}$$

$$= \frac{1,008 - 1}{1}$$

$$= 0,008.$$

D'où: $$\left(\frac{U_{n+1} - U_n}{U_n}\right) \times 100 = 0,8\%.$$

Ainsi, le pourcentage d'augmentation du coût du forage de la $(n+1)$-ième dizaine de mètres par rapport à celui de n-ième dizaine de mètres est égal à: 0,8 %.

3. a. Résumons les résultats obtenus dans un tableau:

Nous avons le tableau suivant:

Valeur de i		2	3	4	5
Valeur de u	2000	2016	2032, 13	2048, 39	2064, 77
Valeur de S	2000	4016	6048, 13	8096, 51	10 161, 29

3 b. Déterminons la valeur de S affichée en sortie et interprétons:

La valeur de S affichée en sortie est: $\approx$ 10 161, 29.

10 161, 29 € correspond au coût de forage à 50 mètres de profondeur.

4. a. Calculons la profondeur maximale:

Nous savons que pour tout entier naturel non nul n:

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$$

cad: $S_n = -250000 + 250000 \times (1,008)^n$.

Or, le budget donné est: $B = 125000$ €.

D'où, la profondeur maximale est telle que: $S_n \leqslant B$.

$$S_n \leqslant B \iff -250\,000 + 250\,000 \times (1,008)^n \leqslant 125\,000$$

$$\iff 250 \times (1,008)^n \leqslant 375$$

$$\iff (1,008)^n \leqslant 1,5$$

$$\iff n \times \ln(1,008) \leqslant \ln(1,5)$$

$$\Rightarrow n \leqslant 50,88.$$

Comme n est un entier naturel non nul, nous prendrons $n = 50$, et la profondeur maximale du puits que l'on peut espérer forer avec le budget B est de:
$50 \times 10 = 500$ mètres (U_{50}).

4. b. Modifions l'algorithme précédent:

L'algorithme modifié est:

Initialisation:

u prend la valeur 2 000

S prend la valeur 2 000

n prend la valeur 1

Traitement:

Tant que $S \leqslant 125\,000$ **faire**

u prend la valeur u x 1,008

S prend la valeur S + u

n prend la valeur n + 1

Fin du Tant que

Sortie:

Afficher (n - 1) x 10