

Corrigé

Exercice 4



freemaths.fr

LES MATHÉMATIQUES

AU BACCALAURÉAT ES

FONCTIONS ET INTÉGRALES, BAC ES

- Fonctions
- Domaine de définition
- Dérivées: f' et f''
- Sens de variation d'une fonction
- Fonction croissante, fonction décroissante
- Tableau des variations d'une fonction
- Fonction concave, fonction convexe
- Point d'inflexion
- Équation d'une tangente
- Primitives
- Intégrales
- Valeur moyenne
- Calcul d'une aire
- Corollaire des valeurs intermédiaires (TVI)

EXERCICE 4

[Centres Étrangers 2019]

Partie A:

1. Indiquons les valeurs de $f(0)$ et $f(2)$:

- D'après l'énoncé:
- $A \in \mathcal{C}_f$ avec $A(0; 2)$,
 - $B \in \mathcal{C}_f$ avec $B(2; 0)$,
 - $C \notin \mathcal{C}_f$ avec $C(-2; 0)$.

- Dans ces conditions:
- $f(0) = f(x_A) = 2$,
 - $f(2) = f(x_B) = 0$.

Ainsi: $f(0) = 2$ et $f(2) = 0$.

2. Indiquons la valeur de $f'(1)$:

$f'(1) = 0$ car la tangente au point $D(1; f(1))$ est parallèle à l'axe des abscisses. Et donc son coefficient directeur est nul.

Ainsi: $f'(1) = 0$.

3. Donnons une équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point A:

- D'après l'énoncé:
- la droite (AC) est tangente en A à la courbe \mathcal{C}_f .

Donc la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point A passe par les points A (0; 2) et C (-2; 0).

Soit: $y = ax + b$, l'équation de cette tangente.

" $a = f'(0) = f'(x_A)$ " est le coefficient directeur et est tel que:

$$a = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} \Leftrightarrow a = \frac{0 - 2}{-2 - 0} \text{ cad: } a = 1.$$

Ainsi: $y = ax + b \Leftrightarrow y = x + b$ (1).

Or comme déjà dit, cette droite passe par le point A (0; 2).

D'où: (1) $\Leftrightarrow 2 = 0 + b$ cad: $b = 2$.

Au total, l'équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point A est: $y = x + 2$.

4. Indiquons le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ dans $[-10; 2]$:

Graphiquement, nous constatons que $f(x) = 1$ cad $y = 1$ dans deux cas:

- quand $x \approx -1, 2$,
- quand $x \approx 1, 8$.

Ainsi, le nombre de solutions dans l'intervalle $[-10; 2]$ est égal à: 2.

5. Indiquons les variations de f sur $[-10; 2]$:

- Sur l'intervalle $[-10; 2]$:
- f est croissante sur $[-10; 1]$,
 - f est décroissante sur $[1; 2]$.

Au total, les variations de f sur l'intervalle $[-10; 2]$ sont:

- f est croissante sur $[-10; 1]$

• f est décroissante sur $[1; 2]$.

6. Déterminons l'intervalle sur lequel f est convexe et celui sur lequel f est concave:

Graphiquement, il semble que:

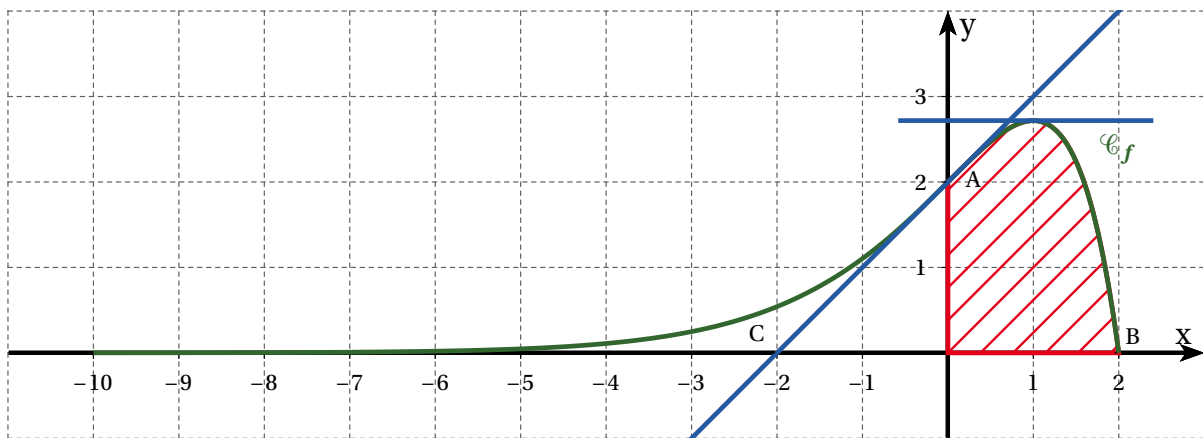
- f est convexe sur $[-10; 0]$,
- f est concave sur $[0; 2]$.

Ainsi:

- f est convexe sur l'intervalle $[-10; 0]$,
- f est concave sur l'intervalle $[0; 2]$.

7. a. Hachurons le domaine du plan dont l'aire est égale à I :

Le domaine du plan dont l'aire est égale à $I = \int_0^2 f(x) dx$ est le suivant:



7. b. Donnons un encadrement du nombre $I = \int_0^2 f(x) dx$ par deux entiers consécutifs:

En comptant le nombre de grands carreaux, il semble que:

$$4 \leq I \leq 5.$$

Partie B:

1. a. Calculons $f(0)$ et $f(2)$:

Ici: • $f(x) = (2 - x)e^x$ ($u \times e^v$)

• $Df = [-10; 2]$.

Dans ces conditions: • $f(0) = (2 - 0)e^0$ cad: $f(0) = 2$,

• $f(2) = (2 - 2)e^2$ cad: $f(2) = 0$.

Ainsi: $f(0) = 2$ et $f(2) = 0$.

1. b. Calculons f' pour tout $x \in [-10; 2]$:

Ici, f est définie et dérivable sur $[-10; 2]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [-10; 2]$.

Pour tout $x \in [-10; 2]$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-1) \times (e^x) + (2 - x) \times (e^x) && (u' \times v + u \times v' \times e^v) \\ &= (1 - x) \times e^x. \end{aligned}$$

Au total, pour tout $x \in [-10; 2]$: $f'(x) = (1 - x) \times e^x$.

1. c. Déduisons-en $f'(1)$:

Comme $f'(x) = (1 - x)e^x$, pour tout $x \in [-10; 2]$, nous avons:

$$f'(1) = 0.$$

Ainsi: $f'(1) = 0$.

2. Déterminons une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0:

L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0

s'écrit: $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$$= [(1 - 0) \times e^0] \times (x - 0) + 2$$

$$= x + 2.$$

Au total: $y = x + 2$ est l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

3. a. Dressons le tableau des variations de f sur $[-10; 2]$:

$$f'(x) = (1 - x)e^x, \text{ pour tout } x \in [-10; 2].$$

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [-10; 2]$:

- 1^{er} cas: $f'(x) \leq 0$.

$$f'(x) \leq 0 \text{ ssi } 1 - x \leq 0 \text{ cad ssi: } x \geq 1 \text{ ou } x \in [1; 2].$$

(car pour tout $x \in \mathbb{R}, e^x > 0$)

- 2^{ème} cas: $f'(x) \geq 0$.

$$f'(x) \geq 0 \text{ ssi } 1 - x \geq 0 \text{ cad ssi: } x \leq 1 \text{ ou } x \in [-10; 1].$$

(car pour tout $x \in \mathbb{R}, e^x > 0$)

Ainsi: • f est croissante sur $[-10; 1]$,

• f est décroissante sur $[1; 2]$.

Nous pouvons donc dresser le tableau des variations suivant:

x	-10	1	2
f'	$+$	0	$-$
f	a	b	c

Avec: • $a = 12 e^{-10}$,

• $b = e$,

• $c = 0$.

3. b. b1. Dédisons-en le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$, dans l'intervalle $[-10; 2]$:

Nous allons appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (TVI) pour répondre à cette question.

• Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.

Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a; b]$ tel que: $f(c) = K$.

Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à $[a; b]$.

• Si de plus, la fonction f est strictement "croissante" ou "décroissante" sur $[a; b]$, l'équation $f(x) = K$ admet une **unique** solution appartenant à $[a; b]$.

Distinguons 2 cas:

1^{er} cas: $x \in [-10; 1]$.

Dans ce cas: • f est continue sur $[-10; 2]$, donc sur $[-10; 1]$.

• " $k = 1$ " est compris entre: $f(-10) = 12e^{-10} < 1$

et: $f(1) = e > 1$.

• f est strictement croissante sur $[-10; 1[$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, nous pouvons affirmer que l'équation $f(x) = 1$ ($k = 1$) admet une **unique** solution α appartenant à $[-10; 1[$.

2^{ème} cas: $x \in [1; 2]$.

Dans ce cas: • f est continue sur $[-10; 2]$, donc sur $[1; 2]$.

• " $k = 1$ " est compris entre: $f(2) = 0 < 1$

et: $f(1) = e > 1$.

• f est strictement décroissante sur $[1; 2[$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, nous pouvons affirmer que l'équation $f(x) = 1$ ($k = 1$) admet une **unique** solution β appartenant à $[1; 2[$.

Au total: l'équation $f(x) = 1$ admet exactement 2 solutions α et β dans l'intervalle $[-10; 2]$.

3. b. b2. Donnons une valeur approchée de " α " et " β " au centième près:

Une valeur approchée de α est: $\alpha \approx -1,15$.

Une valeur approchée de β est: $\beta \approx 1,84$.

4. Etudions la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[-10; 2]$:

D'après le cours: • f est concave sur un intervalle I ssi:

$$\text{pour tout } x \in I, f''(x) \leq 0.$$

• f est convexe sur un intervalle I' ssi:

$$\text{pour tout } x \in I', f''(x) \geq 0.$$

Or ici: $f'(x) = (1-x) \times e^x$. (u x e^v)

D'où: $f''(x) = (-1) \times (e^x) + (1-x) \times (e^x)$. (u' x v + u x v' x e^v)

$$= -x e^x.$$

Dans ces conditions: • $f''(x) \leq 0$ ssi: $x \geq 0$ cad: $x \in [0; 2]$,

• $f''(x) \geq 0$ ssi: $x \leq 0$ cad: $x \in [-10; 0]$.

(car pour tout $x \in \mathbb{R}, e^x > 0$)

Ainsi: • f est convexe sur $I' = [-10; 0]$,

• f est concave sur $I = [0; 2]$.

5. a. Vérifions que F est bien une primitive de f sur $[-10; 2]$:

Sur l'intervalle $[-10; 2]$, F est une primitive de f ssi: $F'(x) = f(x)$.

Ici: $F(x) = (3-x) e^x$.

D'où pour tout $x \in [-10; 2]$: $F'(x) = (3) \times (e^x) + (3-x) \times (e^x)$

$$= -x e^x = f(x).$$

Au total: F est bien une primitive de f sur $[-10; 2]$.

5. b. Déduisons-en une valeur exacte et une valeur approchée, à 10^{-2} près,

$$\text{de } I = \int_0^2 f(x) dx:$$

$$\text{Ici: } I = \int_0^2 f(x) dx.$$

$$\text{D'où: } I = [F(x)]_0^2$$

$$= [(3-x)e^x]_0^2$$

$$= e^2 - 3$$

$$\approx 4,39.$$

Ainsi: • une valeur approchée de I est: 4,39,

• une valeur exacte de I est: $e^2 - 3$.