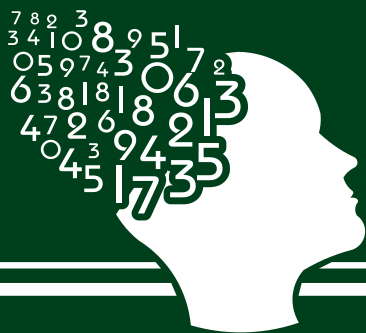


Corrigé

Exercice 3



freemaths.fr

LES MATHÉMATIQUES

AU BACCALAURÉAT ES

SUITES NUMÉRIQUES, BAC ES

- Suite arithmétique
- Suite géométrique
- Calcul de U_0 , U_1 et U_2
- Raison et premier terme d'une suite
- Suite croissante, décroissante
- Majorant, minorant
- Expression de U_n en fonction de n
- Suite convergente
- Théorème des gendarmes
- Limites
- Algorithmes

EXERCICE 3

[Centres Étrangers 2019]

1. a. Déterminons le nombre de vélos dans le stock au 1^{er} juillet 2019 :

D'après l'énoncé: $U_0 = 150$ vélos au 1^{er} juillet 2018.

Ici, il s'agit de calculer U_1 , car 1^{er} juillet 2019 = 1 an après 1^{er} juillet 2018.

$$U_1 = 150 - 20\% \times 150 + 35 \Leftrightarrow U_1 = 150 \times (1 - 20\%) + 35 \Leftrightarrow U_1 = 155 \text{ vélos.}$$

Ainsi, le nombre de vélos dans le stock au 1^{er} juillet 2019 est de: **155**.

1. b. Justifions que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = 0,8 U_n + 35$:

• D'après l'énoncé, le nombre de vélos dans le stock au 1^{er} juillet 2019 est de 150.

D'où: $U_0 = 150$ vélos.

• De plus, chaque année, le loueur de vélos:

- se sépare de 20% de son stock,
- et, achète ensuite 35 nouveaux vélos.

Soient: • U_{n+1} , le nombre de vélos présents dans le stock au 1^{er} juillet de l'année 2018 + (n + 1),

• U_n , le nombre de vélos présents dans le stock au 1^{er} juillet de l'année 2018 + (n).

Pour tout entier naturel n , le nombre de vélos présents dans le stock au 1^{er} juillet de l'année 2018 + $(n + 1)$ est égal à celui U_n diminué de 20% et augmenté de 35 nouveaux vélos.

Pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = U_n - 20\% U_n + 35 \quad \text{cad:} \quad U_{n+1} = 0,8 U_n + 35.$$

Au total, nous avons bien: $U_{n+1} = 0,8 U_n + 35$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. a. Déterminons la formule demandée:

La formule à entrer dans la cellule B_3 est:

• En B_3 : on entre $\ll = 0,8 * B_2 + 35 \gg$.

2. b. Conjecturons la limite de la suite (U_n) :

A la vue du tableau, nous pouvons conjecturer que: $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 175$.

3. a. Montrons que la suite (V_n) est géométrique de raison q et de premier terme V_0 que l'on précisera:

$$V_n = U_n - 175 \iff V_{n+1} = U_{n+1} - 175, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$\iff V_{n+1} = (0,8 U_n + 35) - 175 \quad (1).$$

$$\text{Or: } V_0 = U_0 - 175 \Rightarrow V_0 = 150 - 175 = -25 \text{ et } U_n = V_n + 175.$$

$$\text{Alors: } (1) \iff V_{n+1} = (0,8 [V_n + 175] + 35) - 175$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = 0,8 V_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $V_0 = -25$. $(V_n = -25 \times (0,8)^n)$

3. b. Déduisons-en que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = -25 \times (0,8)^n + 175$:

Nous savons que pour tout $n \in \mathbb{N}$: * $V_n = -25 \times (0,8)^n$

$$* U_n = V_n + 175.$$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n = -25 \times (0,8)^n + 175$.

3. c. Déterminons la limite de la suite (U_n) en $+\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -25 \times (0,8)^n + 175$$

$$= 175 \text{ vélos car: } \lim_{n \rightarrow +\infty} (0,8)^n = 0, \text{ car: } 0,8 \in]0; 1[.$$

Ainsi: $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 175 \text{ vélos.}$

Cela signifie, qu'au bout de n années (n très grand), le nombre de vélos présents dans le stock se stabilisera autour de **175**.

4. Résolvons dans \mathbb{N} , l'inéquation $U_n \geq 170$ et interprétons:

Nous allons déterminer " n " $\in \mathbb{N}$ tel que: $U_n \geq 170$.

$$U_n \geq 170 \Leftrightarrow -25 \times (0,8)^n + 175 \geq 170$$

$$\Leftrightarrow n \cdot \ln(0,8) \leq -\ln(5)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{-\ln(5)}{\ln(0,8)}, \text{ car: } 0,8 \in]0; 1[$$

$\Rightarrow n \geq 8$ ans, car n est un entier naturel.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 170$ ssi: $n \geq 8$ ans.

Cela signifie que 8 ans après le 1^{er} juillet 2018, le nombre de vélos présents dans le stock dépassera les 170 unités.

Et plus exactement, à partir du: 1^{er} juillet 2026.