Corrigé

Exercice 2

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2018

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SUJET

ÉPREUVE DU LUNDI 11 JUIN 2018

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 7

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 7 pages, y compris celle-ci.

EXERCICE n°2 (5 points)

Une société d'autoroute étudie l'évolution de l'état de ses automates de péage en l'absence de maintenance.

Un automate peut se trouver dans l'un des états suivants :

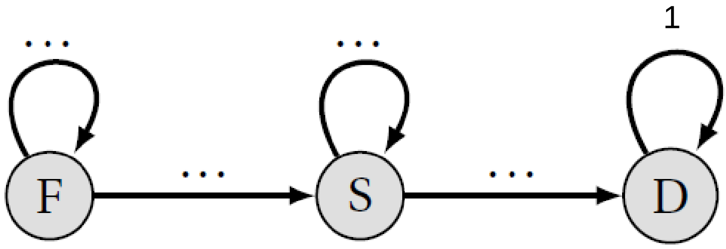
- fonctionnel (F) ;
- en sursis (S) s'il fonctionne encore, mais montre des signes de faiblesse ;
- défaillant (D) s'il ne fonctionne plus.

La société a observé que d'un jour sur l'autre :

- concernant les automates fonctionnels, 90% le restent et 10% deviennent en sursis ;
- concernant les automates en sursis, 80% le restent et 20% deviennent défaillants.

1.

a. Reproduire et compléter le graphe probabiliste ci-après qui représente les évolutions possibles de l'état d'un automate.



b. Interpréter le nombre 1 qui apparaît sur ce graphe.

c. Voici la matrice de transition $M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre F, S, D.

Préciser la signification du coefficient 0,2 dans cette matrice.

2. À compter d'une certaine date, la société relève chaque jour à midi l'état de ses automates. On note ainsi pour tout entier naturel n :

- f_n la probabilité qu'un automate soit fonctionnel le $n^{\text{ième}}$ jour ;
- s_n la probabilité qu'un automate soit en sursis le $n^{\text{ième}}$ jour ;
- d_n la probabilité qu'un automate soit défaillant le $n^{\text{ième}}$ jour.

On note alors $P_n = (f_n \quad s_n \quad d_n)$ la matrice ligne de l'état probabiliste le $n^{\text{ième}}$ jour.
Enfin, la société observe qu'au début de l'expérience tous ses automates sont fonctionnels : on a donc $P_0 = (1 \quad 0 \quad 0)$.

a. Calculer P_1.

b. Montrer que, le 3$^{\text{ème}}$ jour, l'état probabiliste est $(0{,}729 \quad 0{,}217 \quad 0{,}054)$.

c. Vérifier que ce graphe possède un unique état stable $P = (0 \quad 0 \quad 1)$. Quelle est la signification de ce résultat pour la situation étudiée ?

3.

a. Justifier que pour tout entier naturel n, $s_{n+1} = 0{,}1f_n + 0{,}8s_n$.

b. On vérifierait de même que pour tout entier naturel n,

$$d_{n+1} = 0{,}2s_n + d_n \text{ et } f_{n+1} = 0{,}9f_n.$$

Compléter l'algorithme ci-dessous de sorte qu'il affiche le nombre de jours au bout duquel 30 % des automates ne fonctionnent plus.

```
D ← 0
S ← …
F ← 1
N ← 0
Tant que ……
        D ← 0,2 × S + D
        S ← 0,1 × F + 0,8 × S
        F ← 0,9 × F
        N ← …
Fin Tant que
Afficher …
```

c. Au bout de combien de jours la proportion d'automates défaillants devient-elle supérieure à 30 % ?

d. Dans le codage de la boucle « Tant que », l'ordre d'affectation des variables D, S et F est-il important ? Justifier.

EXERCICE 2

[Centres Étrangers 2018]

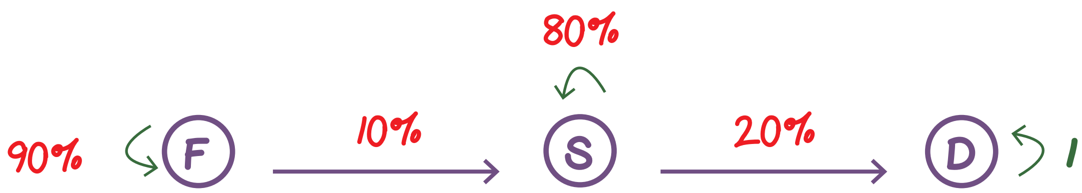
1. a. Recopions et complétons le graphe probabiliste:

Soient: • F, l'état: " Fonctionnel ",

• S, l'état: " Sursis ",

• D, l'état: " Défaillant ".

Le graphe probabiliste G complété est le suivant:



1. b. Interprétons le nombre 1 qui apparaît sur le graphe:

Le nombre 1 signifie que: **100% des automates " défaillants " le reste.**

1. c. Précisons la signification du coefficient " 0, 2 " de la matrice M:

Soit $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, la matrice de transition.

Le coefficient " **0, 2** " signifie que: 20% des automates qui sont en " sursis " deviennent " défaillants ".

2. a. Calculons P_1:

Il s'agit ici de calculer: $P_1 = (f_1 \quad s_1 \quad d_1)$.

D'après le cours: $P_1 = P_0 \times M^1$, M étant la matrice de transition.

Or: $P_0 = (1 \quad 0 \quad 0)$.

D'où: $P_1 = (1 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= (0,9 \quad 0,1 \quad 0)$.

Donc: $f_1 = 90\%$, $s_1 = 10\%$ et $d_1 = 0$.

Au total: $P_1 = (90\% \quad 10\% \quad 0)$.

2. b. Montrons que $P_3 = (0,729 \quad 0,217 \quad 0,054)$:

Il s'agit ici de calculer: $P_3 = (f_3 \quad s_3 \quad d_3)$.

D'après le cours: $P_3 = P_0 \times M^{(3-0)}$ **ou**: $P_3 = P_1 \times M^{(3-1)}$.

$P_3 = P_1 \times M^{(3-1)}$

$= P_1 \times M^2$

$= (0,9 \quad 0,1 \quad 0)\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2$

$= (0,729 \quad 0,217 \quad 0,054)$.

Donc: $f_3 = 72,9\%$, $s_3 = 21,7\%$ et $d_3 = 5,4\%$.

Au total, le 3e jour, l'état probabiliste est bien: $(0,729 \quad 0,217 \quad 0,054)$.

2. c. c1. Vérifions que $P = (0 \quad 0 \quad 1)$ est l'unique état stable du graphe:

Soit P l'état stable de ce graphe.

P vérifie: $P = P \times M$, car l'état stable P est l'unique solution de l'équation

$$P = P \times M.$$

Posons: $P = (0 \quad 0 \quad 1)$. $(0 + 0 + 1 = 1)$

$$P \times M = (0 \quad 0 \quad 1)\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (0 \times 0,9 + 0 \times 0 + 1 \times 0 \quad 0 \times 0,1 + 0 \times 0,8 + 1 \times 0 \quad 0 \times 0 + 0 \times 0,2 + 1 \times 1)$$

$$= (0 \quad 0 \quad 1)$$

$$= P.$$

Ainsi, nous avons: $P \times M = P$, avec: $P = (0 \quad 0 \quad 1)$.

Donc: $P = (0 \quad 0 \quad 1)$ correspond bien à l'unique état stable du graphe.

2. c. c2. Précisons la signification de ce résultat pour la situation étudiée:

L'état stable P nous indique, au bout de n jours (" n très grand "), l'état des automates de la société d'autoroute en l'absence de maintenance.

Comme ici: $P = (0 \quad 0 \quad 1)$, nous pouvons affirmer qu'à long terme 100% des automates seront " défaillants ", en l'absence de maintenance.

3. a. Justifions que pour tout entier naturel n, $s_{n+1} = 0,1 f_n + 0,8 s_n$:

D'après le cours, nous savons que, pour tout entier naturel n, P_{n+1} en fonction de P_n s'écrit: $P_{n+1} = P_n \times M$.

$$P_{n+1} = P_n \times M \iff (f_{n+1} \quad s_{n+1} \quad d_{n+1}) = (f_n \quad s_n \quad d_n)\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff (f_{n+1} \quad s_{n+1} \quad d_{n+1}) = (0,9f_n \quad 0,1f_n + 0,8s_n \quad 0,2s_n + d_n)$$

$$\iff \begin{cases} f_{n+1} = 0,9\, f_n \\ s_{n+1} = 0,1\, f_n + 0,8\, s_n \\ d_{n+1} = 0,2\, s_n + d_n \end{cases}$$

Au total, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons bien: $s_{n+1} = 0,1\, f_n + 0,8\, s_n$.

3. b. Complétons l'algorithme:

L'algorithme complété est le suivant:

```
D ← 0
S ← 0
F ← 1
N ← 0
Tant que D ≤ 0,30
    D ← 0,2 x S + D
    S ← 0,1 x F + 0,8 x S
    F ← 0,9 x F
    N ← N + 1
Fin Tant que
Afficher N
```

3. c. Déterminons au bout de combien de jours la proportion d'automates défaillants devient supérieure à 30%:

Après avoir dressé un tableau allant de $N = 0$ à $N = 8$, pour les valeurs de D, S et F, nous trouvons à l'aide d'une machine à calculer que:

dès que $N = 8$: $D > 30\%$.

Ainsi: au bout de **8 jours**, la proportion d'automates défaillants deviendra, pour la première fois, strictement supérieure à 30%.

3. d. L'ordre d'affectation des variables D, S et F est-il important ?

Oui: si on change l'ordre d'affectation des variables D, S et F, tout change!