Corrigé

Exercice 3

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2017

MATHÉMATIQUES

- Série ES -

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1 à 6.

EXERCICE 3 5 POINTS

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un parti politique organise une élection en son sein pour désigner son candidat à l'élection présidentielle. Seuls les adhérents de ce parti peuvent voter à cette élection et ils ont le choix entre deux candidats A et B.
Pendant la campagne électorale, certains adhérents indécis changent d'avis.
Un institut de sondage consulte chaque mois le même échantillon d'adhérents et recueille leurs intentions de vote.
Il observe que l'évolution de l'état de l'opinion peut être modélisée de la façon suivante.
Chaque mois :

- 5 % des adhérents ayant déclaré vouloir voter pour le candidat A le mois précédent changent d'avis et déclarent vouloir voter pour le candidat B.
- 3 % des adhérents ayant déclaré vouloir voter pour le candidat B le mois précédent déclarent vouloir voter pour le candidat A.

Au début de la campagne électorale, 65 % des adhérents déclarent vouloir voter pour le candidat A. On représente ce modèle par un graphe probabiliste $(\mathcal{G})$ de sommets A et B où :

- A est l'évènement : « l'adhérent déclare vouloir voter pour le candidat A » ;
- B est l'évènement : « l'adhérent déclare vouloir voter pour le candidat B ».

Dans la suite de l'exercice, on note :

- a_n la probabilité qu'un adhérent déclare vouloir voter pour le candidat A, le n-ième mois après le début de la campagne. On a donc $a_0 = 0,65$.
- b_n la probabilité qu'un adhérent déclare vouloir voter pour le candidat B, le n-ième mois après le début de la campagne.

On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ l'état probabiliste correspondant aux intentions de vote le n-ième mois après le début de la campagne. On a donc $P_0 = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,35 \end{pmatrix}$.

1. **a.** Dessiner le graphe probabiliste $(\mathcal{G})$ de sommets A et B.

   b. Écrire la matrice de transition M associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.

2. Démontrer que $P_l = \begin{pmatrix} 0,628 & 0,372 \end{pmatrix}$.

3. On note $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ l'état stable associé à ce graphe.

   a. Démontrer que les nombres a et b sont solutions du système

   $$\left\{\begin{array}{rcl} 0,05a - 0,03b & = & 0 \\ a + \quad b & = & 1 \end{array}\right. .$$

   b. Résoudre le système précédent.

   c. Interpréter dans le contexte de l'exercice la solution obtenue à la question **3. b.**

4. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $a_{n+1} = 0,92a_n + 0,03$.

   b. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = a_n - 0,375$.
   Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,92$ et préciser le premier terme.

   c. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n et en déduire que : $a_n = 0,275 \times 0,92^n + 0,375$.

5. La campagne électorale dure 11 mois. Si la modélisation de l'institut de sondage est valable, quel candidat sera probablement élu ? Justifier la réponse.

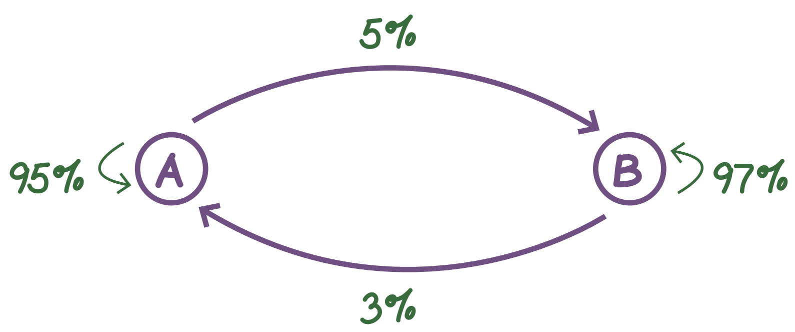
EXERCICE 3

[Centre Étrangers 2017]

1. a. Dessinons le graphe probabiliste G de sommets A et B:

Soient:
- A, l'état: " voter pour le candidat A ",
- B, l'état: " voter pour le candidat B ".

Le graphe probabiliste G est le suivant:



1. b. Ecrivons la matrice M associée à ce graphe:

La matrice associée à ce graphe probabiliste ou matrice de transition M est:

$$M = \begin{pmatrix} 95\% & 5\% \\ 3\% & 97\% \end{pmatrix}.$$

2. Démontrons que $P_1 = (0,628 \quad 0,372)$:

D'après le cours: $P_1 = P_0 \times M$.

Or: $P_0 = (0,65 \quad 0,35)$.

D'où: $P_1 = (0,65 \quad 0,35)\begin{pmatrix} 95\% & 5\% \\ 3\% & 97\% \end{pmatrix} \Rightarrow P_1 = (62,8\% \quad 37,2\%)$.

Au total, nous avons bien: $P_1 = (0,628 \quad 0,372)$.

3. a. Montrons que les nombres a et b vérifient bien le système:

D'après le cours, nous savons que l'état stable $P = (a \quad b)$ est l'unique solution de l'équation: $P = P \times M$.

$$P = P \times M \iff (a \quad b) = (a \quad b)\begin{pmatrix} 95\% & 5\% \\ 3\% & 97\% \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a = 0,95a + 0,03a \\ b = 0,05a + 0,97b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0,05a - 0,03b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}.$$

Au total, le système est bien vérifié.

3. b. Résolvons le système:

$$\begin{cases} 0,05a - 0,03b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 37,5\% \\ b = 62,5\% \end{cases}.$$

Et donc: $P = (37,5\% \quad 62,5\%)$.

Ainsi: $a = 37,5\%$ et $b = 62,5\%$.

3. c. Interprétation:

L'état stable P nous indique, au bout de n années (" n très grand "), le pourcentage d'adhérents qui déclareront voter pour le candidat A, ainsi que celui des adhérents qui déclareront voter pour le candidat B.

Comme ici: $P = (37,5\% \quad 62,5\%)$, nous pouvons affirmer qu'**à long terme**, 37,5% d'adhérents voteront pour le candidat A et 62,5% voteront pour le candidat B.

4. a. Montrons que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,92\,a_n + 0,03$:

D'après le cours, nous savons que, pour tout entier naturel n, P_{n+1} en fonction de P_n s'écrit: $P_{n+1} = P_n \times M$.

$$P_{n+1} = P_n \times M \iff (a_{n+1} \quad b_{n+1}) = (a_n \quad b_n)\begin{pmatrix} 95\% & 5\% \\ 3\% & 97\% \end{pmatrix}$$

$$\iff (a_{n+1} \quad b_{n+1}) = (0,95\,a_n + 0,03\,b_n \quad 0,05\,a_n + 0,97\,b_n)$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = 0,95\,a_n + 0,03\,b_n. \quad (1)$$

Or: $a_n + b_n = 1$.

D'où: $(1) \Rightarrow a_{n+1} = 0,92\,a_n + 0,03$.

Au total, pour tout entier naturel n, nous avons bien: $a_{n+1} = 0,92\,a_n + 0,03$.

4. b. Montrons que la suite (V_n) est géométrique et déterminons V_0 et q:

$$V_n = a_n - 0,375 \iff V_{n+1} = a_{n+1} - 0,375$$

$$\iff V_{n+1} = (0,92\,a_n + 0,03) - 0,375 \quad (2).$$

Or: $V_0 = a_0 - 0,375 \Rightarrow V_0 = 0,65 - 0,375 = 0,275$ et $a_n = V_n + 0,375$.

Ainsi: (2) <=> $V_{n+1} = (0,92\,[V_n + 0,375] + 0,03) - 0,375$

=> $V_{n+1} = 0,92\, V_n$.

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,92$ et de premier terme $V_0 = 0,275$.

4. c. c1. Pour tout entier naturel n, exprimons V_n en fonction de n:

Comme $V_{n+1} = 0,92\, V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$V_n = V_0 \times (0,92)^n$, avec: $V_0 = 0,275$.

En d'autres termes: $V_n = 0,275 \times (0,92)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. c. c2. Déduisons-en a_n:

Pour tout entier naturel n: $a_n = V_n + 0,375$ => $a_n = 0,275 \times (0,92)^n + 0,375$.

Au total, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons: $a_n = 0,275 \times (0,92)^n + 0,375$.

5. Déterminons le candidat qui sera probablement élu:

Pour répondre à cette question, nous allons calculer a_{11} et b_{11}.

Ici: • $a_{11} = 0,275 \times (0,92)^{11} + 0,375$ => $a_{11} \approx 48\%$,

• $b_{11} = 1 - a_{11}$ => $b_{11} \approx 52\%$.

Comme $a_{11} < b_{11}$: ce sera le candidat B qui sera probablement élu, si la campagne électorale dure 11 mois.