# Corrigé

# Exercice 3

freemaths.fr

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

## Session 2017

## MATHÉMATIQUES
## - Série ES -

## ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

***Durée de l'épreuve : 3 heures - Coefficient : 5***

## MATHÉMATIQUES
## - Série L -

## ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

***Durée de l'épreuve : 3 heures - Coefficient : 4***

***Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.***

***Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.***

*Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1 à 6.*

EXERCICE 3 — 5 POINTS

**Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L**

La renouée du Japon est une plante à croissance très rapide et très invasive.
Un jardinier souhaite faire disparaître de son terrain cette espèce qui occupe une superficie de 120 m$^2$ au 1$^{\text{er}}$ janvier 2017. Pour cela, chaque année au printemps, il procède à un arrachage qui permet de réduire de 10 % la superficie de terrain envahi l'année précédente. Cependant, cette espèce de plante ayant une puissance de dissémination très importante, de nouvelles pousses apparaissent chaque été et envahissent une nouvelle parcelle de terrain d'une superficie de 4 m$^2$.

1. Déterminer la superficie de terrain envahi par cette plante au 1$^{\text{er}}$ janvier 2018.

   On modélise la situation par une suite $(u_n)$ où $u_n$ représente la superficie de terrain en m$^2$ envahi par la Renouée du Japon au 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année $2017+n$.

   La suite $(u_n)$ est donc définie par $u_0 = 120$ et, pour tout entier naturel $n$, par $u_{n+1} = 0,9u_n + 4$.

2. Le jardinier souhaite connaître l'année à partir de laquelle il aura réduit au moins de moitié la superficie de terrain envahi par rapport au 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année 2017.

   Recopier et compléter les lignes L1, L3, L4 et L7 de l'algorithme suivant afin qu'il détermine l'année souhaitée.

   *On ne demande pas de faire fonctionner l' algorithme.*

| | |
|---|---|
| L1 | $U$ prend la valeur ... |
| L2 | $N$ prend la valeur 0 |
| L3 | Tant que ..................... |
| L4 | $U$ prend la valeur.......... |
| L5 | $N$ prend la valeur $N+1$ |
| L6 | Fin tant que |
| L7 | Afficher ..................... |

3. On considère la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $v_n = u_n - 40$.

   **a.** Montrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et préciser le premier terme.

   **b.** Exprimer $v_n$ en fonction de $n$, pour tout entier naturel $n$.

   **c.** Justifier que $u_n = 80 \times 0,9^n + 40$ pour tout entier naturel $n$.

4. **a.** Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation
   $80 \times 0,9^n + 40 \leqslant 60$.

   **b.** En déduire l'année à partir de laquelle la superficie envahie par la plante sera réduite au moins de moitié par rapport au 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année 2017
   .

5. Le jardinier arrivera-t-il à faire disparaître complètement la plante de son terrain ? Justifier la réponse.

# EXERCICE 3

## [ Centres Étrangers 2017 ]

1. Déterminons la superficie de terrain envahi par cette plante au 1er janvier 2018:

Il s'agit de calculer $U_1$.

$U_1 = (1 - 10\%)\ U_0 + 4 \iff U_1 = 0,9 \times 120 + 4$

$\Rightarrow U_1 = 122\ m^2.$

Ainsi, la superficie (en $m^2$) de terrain envahi par cette plante au 1er janvier 2018 est de: 122.

2. Recopions et complétons les lignes $L_1$, $L_3$, $L_4$ et $L_7$ de cet algorithme:

Les lignes $L_1$, $L_3$, $L_4$ et $L_7$ complétées sont les suivantes:

| | |
|---|---|
| • $L_1$: | U prend la valeur 120 |
| • $L_3$: | Tant que $U > 60$ |
| • $L_4$: | \| U prend la valeur $0,9 \times U + 4$ |
| • $L_7$: | Afficher $2017 + N$ |

3. a. Montrons que $(V_n)$ est une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et déterminons $V_0$:

$V_n = U_n - 40 \iff V_{n+1} = U_{n+1} - 40$

$\iff V_{n+1} = (0,9\ U_n + 4) - 40 \quad (1).$

Or: $V_0 = U_0 - 40 \Rightarrow V_0 = 80$ et $U_n = V_n + 40$.

Ainsi: (1) $\Longleftrightarrow V_{n+1} = (0,9\,[\,V_n + 40\,] + 4) - 40$

$\Rightarrow V_{n+1} = 0,9\,V_n$.

Par conséquent, $(V_n)$ est bien une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $V_0 = 80$.

**3. b. Exprimons $V_n$ en fonction de n, pour tout entier naturel n:**

Comme $V_{n+1} = 0,9\,V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$V_n = V_0\,(0,9)^n, \text{ avec: } V_0 = 80.$$

**3. c. Justifions que $U_n = 80 \times 0,9^n + 40$, pour tout entier naturel n:**

Nous savons que: * $V_n = 80 \times (0,9)^n$

* $U_n = V_n + 40$.

D'où: $U_n = 80 \times 0,9^n + 40$.

**4. a. Résolvons l'inéquation $80 \times 0,9^n + 40 \leqslant 60$:**

Il s'agit de déterminer " n " tel que: $U_n \leqslant 60$.

$U_n \leqslant 60 \Longleftrightarrow 80 \times 0,9^n + 40 \leqslant 60$

$\Longleftrightarrow 80 \times 0,9^n \leqslant 20$

$\Longleftrightarrow (0,9)^n \leqslant 0,25$

$\Longleftrightarrow n \ln(0,9) \leqslant \ln(0,25)$

$\Longleftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln(0,25)}{\ln(0,9)}$, car: $0,9 \in \,]\,0, 1\,[$, et donc: $\ln(0,9) < 0$

$\Rightarrow n \geqslant 13,157$

$\Rightarrow \quad n \geq 14$ car n est un entier naturel.

Ainsi, 14 ans après le 1er janvier 2017, la superficie de terrain en $m^2$ envahi par la Renouée du Japon sera inférieure à 60 $m^2$.

En d'autres termes, à partir de 2031, la superficie de terrain en $m^2$ envahi par la Renouée du Japon sera inférieure à 60 $m^2$.

**4. b. Déduisons-en l'année à partir de laquelle la superficie envahie par la plante sera réduite au moins de moitié par rapport au 1er janvier 2017:**

La superficie envahie par la plante sera réduite au moins de moitié par rapport au 1er janvier 2017 ssi : $U_n \leq \dfrac{120}{2}$.

Cela revient à déterminer " n " tel que: $U_n \leq 60$.

Or, à la question précédente, nous avons vu que dans ce cas: $n = 14$.

Au total, l'année demandée est donc: 2017 + " 14 " cad 2031.

**5. Le jardinier arrivera-t-il à faire disparaître complètement la plante de son terrain ?**

Pour répondre à cette question, nous devons calculer: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} 80 \times (0,9)^n + 40$$

$$= 40 \quad \text{car: } \lim_{n \to +\infty} (0,9)^n = 0, \quad \text{car: } 0,9 \in ]0, 1[.$$

La suite $(U_n)$ est donc convergente et converge vers 40 $m^2$.

Cela signifie qu'au bout de n années (" n " très grand) la superficie envahie par la plante sera au minimum de 40 $m^2$.

Donc non, le jardinier n'y arrivera pas.