Corrigé

Exercice 2

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2017

MATHÉMATIQUES
- Série ES -

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures - Coefficient : 5

MATHÉMATIQUES
- Série L -

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures - Coefficient : 4

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1 à 6.

freemaths.fr

EXERCICE 2 — 6 POINTS

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-20~;~20]$ par

$$f(x) = (-2x+30)\mathrm{e}^{0,2x-3}.$$

1. **a.** Montrer que $f'(x) = (-0,4x+4)\mathrm{e}^{0,2x-3}$ pour tout réel x de l'intervalle $[-20~;~20]$.
   b. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-20;20]$.
   On précisera la valeur exacte du maximum de f.
2. **a.** Montrer que, sur l'intervalle $[-20~;~20]$, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α.
   b. Donner un encadrement de α d'amplitude $0,1$.
3. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

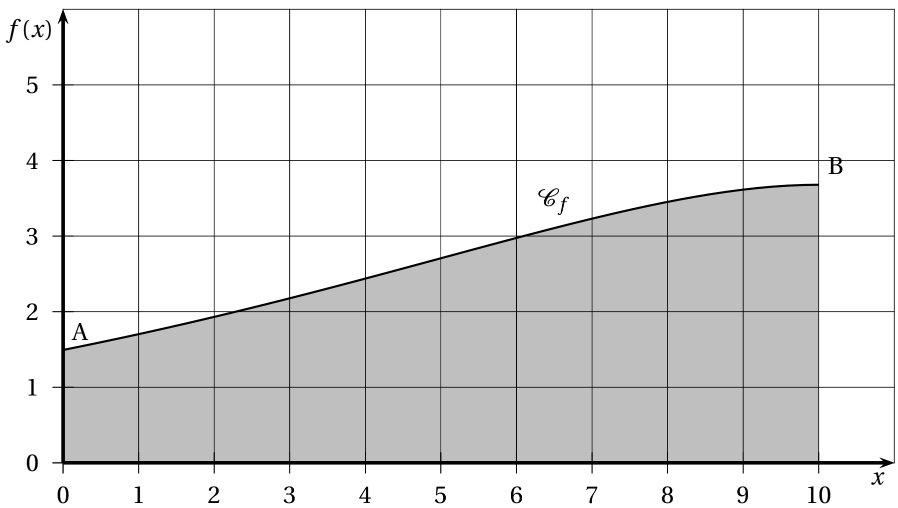
1	Dériver $(-10x+200)\mathrm{e}^{0,2x-3}$ $(-2x+30)\mathrm{e}^{0,2x-3}$
2	Dériver $(-2x+30)\mathrm{e}^{0,2x-3}$ $(-0,4x+4)\mathrm{e}^{0,2x-3}$
3	Dériver $(-0,4x+4)\mathrm{e}^{0,2x-3}$ $(-0,08x+0,4)\mathrm{e}^{0,2x-3}$

   Répondre aux deux questions suivantes en utilisant les résultats donnés par le logiciel :

   a. Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_{10}^{15} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   b. Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe et préciser l'abscisse du point d'inflexion.

Partie B

Une station de ski souhaite ouvrir une nouvelle piste au public. Le relief de cette piste est modélisé ci-dessous par la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie dans la partie A sur l'intervalle $[0~;~10]$. Le point B représente le départ de la nouvelle piste et le point A représente la station de ski où se trouve l'arrivée.



Le réel x représente la distance horizontale, exprimée en km, depuis la station de ski et $f(x)$ représente l'altitude, exprimée en km.
On appelle pente de la piste au point M, le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point M. Par exemple, une pente de 15 % en un point de la piste correspond à un coefficient directeur de $\dfrac{15}{100} = 0,15$.

1. On appelle dénivelé d'une piste de ski, la différence d'altitude entre le point de départ et le point d'arrivée de cette piste. Calculer le dénivelé de cette nouvelle piste. On arrondira le résultat au mètre.

2. La station de ski doit déterminer la difficulté de cette nouvelle piste en fonction de la pente.

   — La piste sera classée noire, c'est-à-dire très difficile, si au moins une portion de la piste a une pente supérieure ou égale à 40 %.

   — La piste sera classée rouge, c'est-à-dire difficile, si au moins une portion de la piste a une pente strictement comprise entre 25 % et 40 % (et aucune portion avec une pente supérieure ou égale à 40 %).

   — Si toutes les portions de la piste ont une pente inférieure ou égale à 25 % alors la piste sera classée bleue, c'est-à-dire facile.

   Déterminer le niveau de difficulté de cette nouvelle piste. Justifier la réponse.

EXERCICE 2

[Centres Étrangers 2017]

Partie A:

1. a. Déterminons f' pour tout réel x de l'intervalle $[-20 ; 20]$:

Ici: • $f(x) = (-2x + 30)\, e^{0,2x-3}$ **(u x v)**

• $Df = [-20 ; 20]$.

Posons: $f = f_1 \times f_2$, avec: $f_1(x) = -2x + 30$ et $f_2(x) = e^{0,2x-3}$.

f_1 est dérivable sur IR comme fonction polynôme, donc dérivable sur l'intervalle $[-20 ; 20]$.

f_2 est dérivable sur IR comme fonction exponentielle, donc dérivable sur l'intervalle $[-20 ; 20]$.

Par conséquent, f est dérivable sur $[-20 ; 20]$ comme produit $(f_1 \times f_2)$ de 2 fonctions dérivables sur $[-20 ; 20]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [-20 ; 20]$.

Pour tout $x \in [-20 ; 20]$:

$$f'(x) = (-2) \times e^{0,2x-3} + (-2x + 30) \times (0,2) \times e^{0,2x-3} \quad \textbf{(u' x v + u x v')}$$

$\Longleftrightarrow$ $f'(x) = e^{0,2x-3} \times (-2 - 0,4x + 6)$

$\Rightarrow$ $f'(x) = (-0,4x + 4)\, e^{0,2x-3}$.

Au total, pour tout $x \in [-20 ; 20]$: $f'(x) = (-0,4x + 4)\, e^{0,2x-3}$.

1. b. **Dressons le tableau de variation de f sur l'intervalle $[-20\,;\,20]$ et précisons la valeur exacte du maximum de f:**

Étape 1: $f'(x) = (-0,4x + 4)\, e^{0,2x-3}$, sur $[-20\,;\,20]$.

Nous allons distinguer 3 cas, pour tout x de $[-20\,;\,20]$, sachant que:

$$e^{0,2x-3} > 0.$$

• **1^er cas**: $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0$ ssi $(-0,4x + 4)\, e^{0,2x-3} = 0$

$\iff -0,4x + 4 = 0$, cad: $x = 10$.

• **2^ème cas**: $f'(x) < 0$.

$f'(x) < 0$ ssi $(-0,4x + 4)\, e^{0,2x-3} < 0$

$\iff -0,4x + 4 < 0$, cad: $x > 10$ ou $x \in]\,10\,;\,20\,]$.

• **3^ème cas**: $f'(x) > 0$.

$f'(x) > 0$ ssi $(-0,4x + 4)\, e^{0,2x-3} > 0$

$\iff -0,4x + 4 > 0$, cad: $x < 10$ ou $x \in [-20\,;\,10\,[$.

Au total: • f est croissante sur $[-20\,;\,10]$,

(car sur $[-20\,;\,10]$, $f'(x) \geq 0$)

• f est décroissante sur $[\,10\,;\,20\,]$.

(car sur $[\,10\,;\,20\,]$, $f'(x) \leq 0$)

Étape 2: Le tableau de variation.

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation suivant:

x	-20		10		20
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	b	$\searrow$	
	a				c

Avec: • $a = f(-20) \Rightarrow a = 70\,e^{-7}$,

• $b = f(10) \Rightarrow b = 10\,e^{-1}$,

• $c = f(20) \Rightarrow c = -10\,e$.

Étape 3: Valeur exacte du maximum de f.

Soit $E\,(x_E\,;y_E)$, le maximum de f sur $[-20\,;20]$.

x_E est tel que: $f'(x_E) = 0$.

$f'(x_E) = 0 \Rightarrow x_E = 10$ et donc $y_E = 10\,e^{-1}$.

Au total: le point $E\,(10\,;\,10\,e^{-1})$ est le maximum de f sur $[-20\,;20]$.

2. a. Montrons que, sur $[-20\,;20]$, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α:

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

- Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.

Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a; b]$ tel que: $f(c) = K$.

Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à $[a; b]$.

- Si de plus, la fonction f est strictement " croissante " ou " décroissante " sur $[a; b]$, l'équation $f(x) = K$ admet une unique solution appartenant à $[a; b]$.

Ici:
- f est continue sur $[-20; 20]$, donc sur $]10; 20]$.
- " $k = -2$ " est compris entre: $f(20) = -10e$

  et: $f(10) = 10e^{-1}$.
- f est strictement décroissante sur $]10; 20]$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $f(x) = -2$ $(k = -2)$ admet une unique solution α appartenant à $]10; 20]$, et plus généralement à $[-20; 20]$.

Au total: $f(x) = -2$ admet exactement une solution α sur $[-20; 20]$.

2. b. Donnons un encadrement de α d'amplitude 0, 1:

Par tâtonnement, nous trouvons: $15,8 < \alpha < 15,9$.

Au total, un encadrement de α d'amplitude 0, 1 est:

$$15,8 < \alpha < 15,9.$$

3. a. Calculons la valeur exacte de $\int_{10}^{15} f(x)\,dx$:

Ici, il s'agit de calculer: $I = \int_{10}^{15} f(x)\,dx$,

cad: $I = [\,F(x)\,]_{10}^{15}$.

$I = [\,F(x)\,]_{10}^{15}$

$= [\,(-10x + 200)\,e^{0,2x-3}\,]_{10}^{15}$ (logiciel)

$\Rightarrow$ $I = 50 - 100\,e^{-1}$.

Au total: $I = \int_{10}^{15} f(x)\,dx = 50 - 100\,e^{-1}$.

3. b. Déterminons le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe et précisons l'abscisse du point d'inflexion:

• Soit $[\,e\,;f\,]$, l'intervalle recherché.

Ici: • $f''(x) = (-0,08x + 0,4)\,e^{0,2x-3}$. (logiciel)

f est convexe sur $[\,e\,;f\,]$ ssi: pour tout $x \in [\,e\,;f\,]$, $f''(x) \geqslant 0$.

Or le signe de f'' dépend du signe de: $-0,08x + 0,4$ (car $e^{0,2x-3} > 0$).

Dans ces conditions: $f''(x) \geqslant 0$ ssi $-0,08x + 0,4 \geqslant 0$,

cad: $x \leqslant 5$ ou $x \in [\,-20\,;5\,]$.

Au total: f est convexe sur $[\,e\,;f\,] = [\,-20\,;5\,]$.

• Point d'inflexion ?

Rappelons qu'en un point d'inflexion, la dérivée seconde s'annule et change de signe.

Or c'est le cas quand: $x = 5$.

Au total, l'abscisse du point d'inflexion est: $x = 5$.

Partie B:

1. Calculons le dénivelé de cette nouvelle piste:

Le dénivelé de cette nouvelle piste est: $f(x_B) - f(x_A)$.

Or: $x_B = 10$ et $x_A = 0$.

D'où: $f(x_B) - f(x_A) = f(10) - f(0)$

$= 10\ e^{-1} - 30\ e^{-3}$

$\approx 2,185$ km.

Au total, le dénivelé de cette nouvelle piste, arrondi au mètre, est: 2 185 m.

2. Déterminons le niveau de difficulté de cette nouvelle piste:

Pour répondre à cette question, nous devons calculer la pente au maximum de la courbe, pour $x \in [0 ; 10]$.

Or, le maximum est atteint au point: $x = 5$ (d'après **3. b.**).

Dans ces conditions, la pente de f quand $x = 5$ est:

$f'(5) = 2\ e^{-2}$ => $f'(5) \approx 27\%$

Au total, le niveau de difficulté de cette nouvelle piste est: rouge.