Corrigé

Exercice 4

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2016

MATHÉMATIQUES

- Série ES -

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,8]$ par

$$f(x) = \frac{0,4}{20\mathrm{e}^{-x}+1} + 0,4.$$

1. Montrer que $f'(x) = \dfrac{8\mathrm{e}^{-x}}{(20\mathrm{e}^{-x}+1)^2}$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

2. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

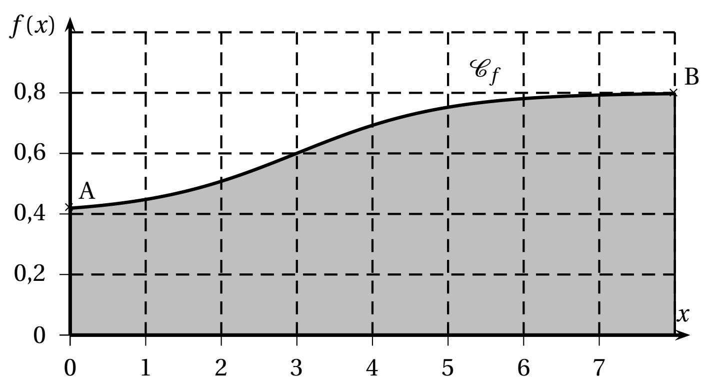
1	$f'(x) := 8*\mathrm{e}\hat{}(-x)/(20*\mathrm{e}\hat{}(-x)+1)^2$ $\to f'(x) : \dfrac{8\cdot\mathrm{e}^{-x}}{400\,(\mathrm{e}^{-x})^2+40\mathrm{e}^{-x}+1}$
2	$g(x) :=$ Dérivée $[f'(x)]$ $\to g(x) := \dfrac{160\,(\mathrm{e}^{-x})^2-8\mathrm{e}^{-x}}{8000\,(\mathrm{e}^{-x})^3+1200\,(\mathrm{e}^{-x})^2+60\mathrm{e}^{-x}+1}$
3	Factoriser $[g(x)]$ $\to 8\mathrm{e}^{-x}\cdot\dfrac{20\mathrm{e}^{-x}-1}{(20\mathrm{e}^{-x}+1)^3}$

En s'appuyant sur ces résultats, déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

Partie B

Dans une région montagneuse, une entreprise étudie un projet de route reliant les villages A et B situés à deux altitudes différentes. La fonction f, définie dans la partie A, modélise le profil de ce projet routier. La variable x représente la distance horizontale, en kilomètres, depuis le village A et $f(x)$ représente l'altitude associée, en kilomètres.

La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est donnée ci-dessous.



Dans cet exercice, le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en un point M est appelé « pente en M ».

On précise aussi qu'une pente en M de 5 % correspond à un coefficient directeur de la tangente à la courbe de f en M égal à 0,05.

Il est décidé que le projet sera accepté à condition qu'en aucun point de $\mathscr{C}_f$ la pente ne dépasse 12 %.

Pour chacune des propositions suivantes, dire si la proposition est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

Proposition 1

L'altitude du village B est 0,6 km.

Proposition 2

L 'écart d'altitude entre les villages A et B est 378 mètres, valeur arrondie au mètre.
Proposition 3
La pente en A vaut environ 1,8 %.
Proposition 4
Le projet de route ne sera pas accepté.

EXERCICE 4

[Centres Étrangers 2016]

Partie A:

1. Montrons que $f'(x) = \dfrac{8e^{-x}}{(20e^{-x} + 1)^2}$:

Ici: • $f(x) = \dfrac{0,4}{20e^{-x} + 1} + 0,4$

• $Df = [0;8]$.

Posons: $f = \dfrac{f_1}{3f_2 + f_3} + f_1$, avec: $f_1(x) = 0,4$, $f_2(x) = e^{-x}$ et $f_3(x) = 1$.

f_1 et f_3 sont dérivables sur IR comme fonctions polynômes, donc dérivables sur l'intervalle $[0;8]$.

f_2 est dérivable sur IR comme fonction " exponentielle ", donc dérivable sur l'intervalle $[0;8]$.

Par conséquent, $h = 3f_2 + f_3$ est dérivable sur $[0;8]$ comme somme de 2 fonctions dérivables sur $[0;8]$.

De plus, $\dfrac{f_1}{h}$ est dérivable sur $[0;8]$ comme quotient de 2 fonctions dérivables sur $[0;8]$, avec: pour tout $x \in [0;8]$, $h(x) \neq 0$.

Enfin, f est dérivable sur $[0;8]$ comme somme $\left(\dfrac{f_1}{h} + f_1\right)$ de 2 fonctions dérivables sur $[0;8]$.

Ainsi: nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [0;8]$.

Pour tout $x \in [0;8]$: $f'(x) = \dfrac{-0,4 \times (-20e^{-x})}{(20e^{-x}+1)^2}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{8e^{-x}}{(20e^{-x}+1)^2}.$$

Au total: pour tout $x \in [0;8]$, $f'(x) = \dfrac{8e^{-x}}{(20e^{-x}+1)^2}$.

2. Déterminons l'intervalle sur lequel f est convexe:

Ici: • $f'(x) = \dfrac{8e^{-x}}{(20e^{-x}+1)^2}$

• $f''(x) = g(x) = 8e^{-x}.\left(\dfrac{20e^{-x}-1}{(20e^{-x}+1)^3}\right)$.

Nous savons que f est convexe ssi: $f''(x) \geqslant 0 \iff g(x) \geqslant 0$.

$g(x) \geqslant 0 \iff 8e^{-x}.\left(\dfrac{20e^{-x}-1}{(20e^{-x}+1)^3}\right) \geqslant 0$.

Or: pour tout $x \in [0;8]$, $8e^{-x} > 0$ et $(20e^{-x}+1)^3 > 0$.

D'où: $g(x) \geqslant 0$ ssi: $20e^{-x} - 1 \geqslant 0$ cad ssi: $e^{-x} \geqslant \dfrac{1}{20} \Rightarrow x \leqslant \ln(20)$.

Au total, f est convexe sur l'intervalle: $[0;\ln(20)]$.

Partie B:

Proposition 1: " L'altitude du village B est 0, 6 km ".

C'est faux.

Justifions le.

L'altitude associée, en kilomètres, du village B est: $f(8)$.

Or: $f(8) \approx 0,797$ km.

Au total, l'altitude du village B est d'environ: 797 mètres, et pas 600 mètres.

Proposition 2: **" L'écart d'altitude entre les villages A et B est de 378 mètres ".**

C'est vrai.

Justifions le.

Il s'agit de calculer ici: $f(8) - f(0)$.

$f(8) - f(0) \approx 0,797 - 0,419 \Rightarrow f(8) - f(0) \approx 0,378$.

Au total, l'écart d'altitude entre les villages A et B est bien de: 378 mètres.

Proposition 3: **" La pente en A vaut 1,8% ".**

C'est vrai.

Justifions le.

Il s'agit de calculer ici: $f'(0)$.

$$f'(0) = \frac{8e^{-0}}{(20e^{-0} + 1)^2} \Rightarrow f'(0) \approx 0,018.$$

Au total, la pente en A vaut environ: 1,8%.

Proposition 4: " Le projet de route ne sera pas accepté ".

C'est faux.

Justifions le.

Le projet sera accepté à condition qu'en aucun point de la courbe, la pente ne dépasse 12%.

Il s'agit de calculer ici la pente au maximum de la courbe, pour $x \in [0;8]$.

Or, le maximum est atteint au point: $x = \ln(20)$.

Dans ces conditions, la pente de f quand $x = \ln(20)$ est:

$f'(\ln(20)) = 0,1 \Rightarrow f'(\ln(20)) = 10\%$.

Au total, le projet sera accepté car au maximum de la courbe, la pente est égale à: $10\% < 12\%$.