EXERCICE 4

[Centres Étrangers 2016]

Partie A:

1. Montrons que $f'(x) = \dfrac{8e^{-x}}{(20e^{-x}+1)^2}$:

Ici: • $f(x) = \dfrac{0,4}{20e^{-x}+1} + 0,4$

• $Df = [0;8]$.

Posons: $f = \dfrac{f_1}{3f_2 + f_3} + f_1$, avec: $f_1(x) = 0,4$, $f_2(x) = e^{-x}$ et $f_3(x) = 1$.

f_1 et f_3 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme fonctions polynômes, donc dérivables sur l'intervalle $[0;8]$.

f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction " exponentielle ", donc dérivable sur l'intervalle $[0;8]$.

Par conséquent, $h = 3f_2 + f_3$ est dérivable sur $[0;8]$ comme somme de 2 fonctions dérivables sur $[0;8]$.

De plus, $\dfrac{f_1}{h}$ est dérivable sur $[0;8]$ comme quotient de 2 fonctions dérivables sur $[0;8]$, avec: pour tout $x \in [0;8]$, $h(x) \neq 0$.

Enfin, f est dérivable sur $[0;8]$ comme somme $\left(\dfrac{f_1}{h} + f_1\right)$ de 2 fonctions dérivables sur $[0;8]$.

Ainsi: nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [0;8]$.

Pour tout $x \in [0;8]$: $f'(x) = \dfrac{-0,4 \times (-20e^{-x})}{(20e^{-x}+1)^2}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{8e^{-x}}{(20e^{-x}+1)^2}.$$

Au total: pour tout $x \in [0;8]$, $f'(x) = \dfrac{8e^{-x}}{(20e^{-x}+1)^2}$.

2. Déterminons l'intervalle sur lequel f est convexe:

Ici: • $f'(x) = \dfrac{8e^{-x}}{(20e^{-x}+1)^2}$

• $f''(x) = g(x) = 8e^{-x} \cdot \left(\dfrac{20e^{-x}-1}{(20e^{-x}+1)^3}\right)$.

Nous savons que f est convexe ssi: $f''(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow g(x) \geqslant 0$.

$g(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 8e^{-x} \cdot \left(\dfrac{20e^{-x}-1}{(20e^{-x}+1)^3}\right) \geqslant 0$.

Or: pour tout $x \in [0;8]$, $8e^{-x} > 0$ et $(20e^{-x}+1)^3 > 0$.

D'où: $g(x) \geqslant 0$ ssi: $20e^{-x} - 1 \geqslant 0$ cad ssi: $e^{-x} \geqslant \dfrac{1}{20} \Rightarrow x \leqslant \ln(20)$.

Au total, f est convexe sur l'intervalle: $[0;\ln(20)]$.

Partie B:

Proposition 1: **" L'altitude du village B est 0,6 km "**.

C'est faux.

Justifions le.

L'altitude associée, en kilomètres, du village B est: $f(8)$.

Or: $f(8) \approx 0,797$ km.

Au total, l'altitude du village B est d'environ: 797 mètres, et pas 600 mètres.

Proposition 2: **" L'écart d'altitude entre les villages A et B est de 378 mètres ".**

C'est vrai.

Justifions le.

Il s'agit de calculer ici: $f(8) - f(0)$.

$f(8) - f(0) \approx 0,797 - 0,419 \Rightarrow f(8) - f(0) \approx 0,378$.

Au total, l'écart d'altitude entre les villages A et B est bien de: 378 mètres.

Proposition 3: **" La pente en A vaut 1,8% ".**

C'est vrai.

Justifions le.

Il s'agit de calculer ici: $f'(0)$.

$$f'(0) = \frac{8e^{-0}}{(20e^{-0} + 1)^2} \Rightarrow f'(0) \approx 0,018.$$

Au total, la pente en A vaut environ: 1,8%.

Proposition 4 : " Le projet de route ne sera pas accepté ".

C'est faux.

Justifions le.

Le projet sera accepté à condition qu'en aucun point de la courbe, la pente ne dépasse 12%.

Il s'agit de calculer ici la pente au maximum de la courbe, pour $x \in [0;8]$.

Or, le maximum est atteint au point: $x = \ln(20)$.

Dans ces conditions, la pente de f quand $x = \ln(20)$ est:

$f'(\ln(20)) = 0,1 \Rightarrow f'(\ln(20)) = 10\%$.

Au total, le projet sera accepté car au maximum de la courbe, la pente est égale à: $10\% < 12\%$.