Corrigé

Exercice 3

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2016

MATHÉMATIQUES

- Série ES -

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

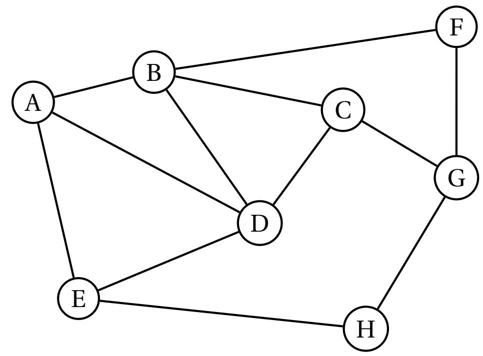
Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Une compagnie aérienne utilise huit aéroports que l'on nomme A, B, C, D, E, F, G et H.
Entre certains de ces aéroports, la compagnie propose des vols dans les deux sens.
Cette situation est représentée par le graphe Γ ci-contre, dans lequel :

- les sommets représentent les aéroports,
- les arêtes représentent les liaisons assurées dans les deux sens par la compagnie.



Partie A

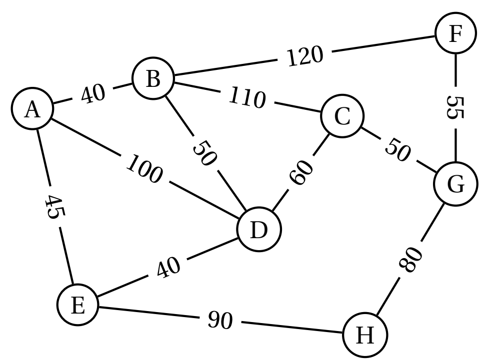
1. **a.** Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ est complet.
   b. Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ est connexe.
2. Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ admet une chaîne eulérienne. Si oui, donner une telle chaîne.
3. Donner la matrice d'adjacence M du graphe Γ en respectant l'ordre alphabétique des sommets du graphe.
4. Pour la suite de l'exercice, on donne les matrices suivantes :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 & 7 & 6 & 1 & 4 & 1 \\ 8 & 4 & 8 & 8 & 3 & 6 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 7 & 6 & 7 & 3 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 4 & 7 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 3 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 6 & 3 & 1 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

   Un voyageur souhaite aller de l'aéroport B à l'aéroport H.
   a. Déterminer le nombre minimal de vols qu'il doit prendre, Justifier les réponses à l'aide des matrices données ci-dessus.
   b. Donner tous les trajets possibles empruntant trois vols successifs.

Partie B

Les arêtes sont maintenant pondérées par le coût de chaque vol, exprimé en euros.
Un voyageur partant de l'aéroport A doit se rendre à l'aéroport G.
En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminer le trajet le moins cher.



EXERCICE 3

[Centres Étrangers 2016]

Partie A:

1. a. Déterminons, en justifiant, si le graphe est complet:

D'après le cours, nous savons que:

- Deux sommets sont dits adjacents s'ils sont reliés par une arête.
- Un graphe dont les sommets sont 2 à 2 adjacents est aussi appelé graphe complet.

Ici, le graphe n'est pas complet car, par exemple, les sommets D et H ne sont pas adjacents.

Au total: le graphe n'est pas complet.

1. b. Déterminons, en justifiant, si le graphe est connexe:

Ici, le graphe est connexe car il existe une chaîne entre deux sommets quelconques de ce graphe.

En effet, deux sommets quelconques de ce graphe peuvent, par exemple, être reliés par une chaîne extraite de la chaîne: A - B - C - D - E - H - G - F.

Au total: le graphe est donc connexe.

2. Déterminons, en justifiant, si le graphe admet une chaîne eulérienne:

D'après le cours:

G étant un graphe connexe, les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

- Deux sommets (et deux seulement) X et Y de G sont de degré impair.
- G admet une chaîne eulérienne d'extrémités X et Y.

Ici, le tableau des sommets degrés est le suivant:

Sommets	A	B	C	D	E	F	G	H
Degrés	3	4	3	4	3	2	3	2

Il y a donc 4 sommets A, C, E et G de degré impair.

Par conséquent: le graphe n'admet pas de chaîne eulérienne.

Au total: le graphe n'admet pas une chaîne eulérienne.

3. Donnons la matrice d'adjacence du graphe:

La matrice associée au graphe probabiliste ou matrice de transition M est:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. a. Déterminons le nombre minimal de vols qu'il doit prendre pour aller de B à H:

Pour répondre à cette question, nous allons regarder le chiffre indiqué sur la 2ᵉ ligne (B), 8ᵉ colonne (H), et ce, pour les matrices M, M^2 et M^3.

Pour M: le chiffre est: 0.

Pour M^2: le chiffre est: 0.

Pour M^3: le chiffre est: 4.

Donc au total: il faut 3 (**M^3**) vols minimum pour aller de l'aéroport B à l'aéroport H. Et il y a 4 possibilités.

4. b. Donnons tous les trajets possibles:

Les 4 possibilités sont:

- B - C - G - H
- B - A - E - H
- B - D - E - H
- B - F - G - H.

Partie B:

En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminons le trajet le moins cher pour aller de A à G:

Après recours à l'algorithme de Dijkstra, nous trouvons comme trajet le moins cher pour aller de l'aéroport A à l'aéroport G:

le trajet A - E - D - C - G.

Et ce dernier coûtera: $45 + 40 + 60 + 50 = 195$ €.

Au total, le trajet le moins cher pour aller de A à G est:

A - E - D - C - G, et il en coûtera 195 € au voyageur.