Corrigé

Exercice 2

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2016

MATHÉMATIQUES

- Série ES -

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.

EXERCICE 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

Un fabricant produit des pneus de deux catégories, la catégorie « pneu neige » et la catégorie « pneu classique ». Sur chacun d'eux, on effectue des tests de qualité pour améliorer la sécurité.

On dispose des informations suivantes sur le stock de production :

— le stock contient 40 % de pneus neige ;

— parmi les pneus neige, 92 % ont réussi les tests de qualité ;

— parmi les pneus classiques, 96 % ont réussi les tests de qualité.

Un client choisit un pneu au hasard dans le stock de production. On note :

— N l'évènement : « Le pneu choisi est un pneu neige » ;

— C l'évènement : « Le pneu choisi est un pneu classique » ;

— Q l'évènement : « Le pneu choisi a réussi les tests de qualité ».

Rappel des notations :

Si A et B sont deux évènements, $p(A)$ désigne la probabilité que l'évènement A se réalise et $p_B(A)$ désigne la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé. On notera aussi $\overline{A}$ l'évènement contraire de A.

Les parties A, B et C peuvent être traitées de manière indépendante.

Dans tout cet exercice, les résultats seront arrondis au millième.

Partie A

1. Illustrer la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité de l'évènement $N \cap Q$ et interpréter ce résultat par une phrase.
3. Montrer que $p(Q) = 0,944$.
4. Sachant que le pneu choisi a réussi les tests de qualité, quelle est la probabilité que ce pneu soit un pneu neige ?

Partie B

On appelle durée de vie d'un pneu la distance parcourue avant d'atteindre le témoin d'usure. On note X la variable aléatoire qui associe à chaque pneu classique sa durée de vie, exprimée en milliers de kilomètres. On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 30$ et d'écart-type $\sigma = 8$.

1. Quelle est la probabilité qu'un pneu classique ait une durée de vie inférieure à 25 milliers de kilomètres ?
2. Déterminer la valeur du nombre d pour que, en probabilité, 20 % des pneus classiques aient une durée de vie supérieure à d kilomètres.

Partie C

Une enquête de satisfaction effectuée l'an dernier a révélé que 85 % des clients étaient satisfaits de la tenue de route des pneus du fabricant. Ce dernier souhaite vérifier si le niveau de satisfaction a été le même cette année.

Pour cela, il décide d'interroger un échantillon de 900 clients afin de conclure sur l'hypothèse d'un niveau de satisfaction maintenu.

Parmi les 900 clients interrogés, 735 sont satisfaits de la tenue de route.

Quelle va être la conclusion du directeur avec un niveau de confiance 0,95 ? Détailler les calculs, la démarche et l'argumentation.

EXERCICE 2

[Centres Étrangers 2016]

Partie A: Les pneus

1. Illustrons la situation à l'aide d'un arbre pondéré:

D'après l'énoncé, nous avons:

- N = " le pneu choisi est un pneu neige ".
- C = " le pneu choisi est un pneu classique ".
- Q = " le pneu choisi a réussi les tests ".
- $\bar{Q}$ = " le pneu choisi a échoué les tests ".

- $P(N) = 40\%$
- $P(C) = 60\%$

$(40\% + 60\% = 1)$.

- $P_N(Q) = 92\%$
- $P_N(\bar{Q}) = 8\%$

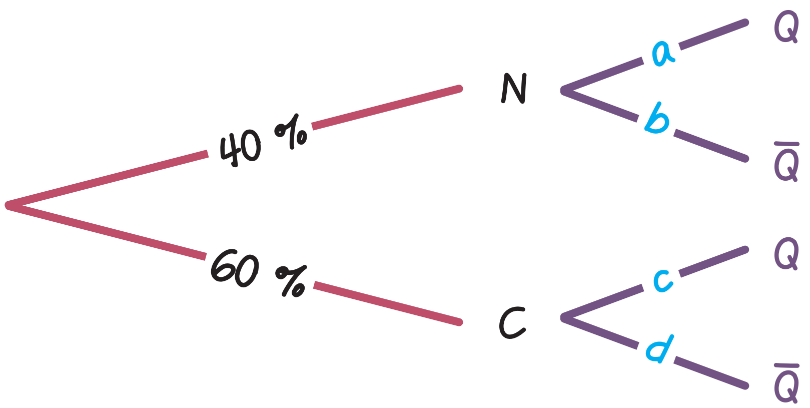
$(92\% + 8\% = 1)$.

- $P_C(Q) = 96\%$
- $P_C(\bar{Q}) = 4\%$

$(96\% + 4\% = 1)$.

Nous allons illuster la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

D'où l'arbre pondéré suivant:



, avec:
- $a = 92\ \%$
- $b = 8\ \%$
- $c = 96\ \%$
- $d = 4\ \%$

2. Calculons et interprétons $P(N \cap Q)$:

$P(N \cap Q) = P_N(Q) \times P(N)$.

Ainsi: $P(N \cap Q) = 92\% \times 40\%$ => $P(N \cap Q) = 36.8\%$.

Cela signifie qu'il y a 36.8% de chance pour que le pneu soit un " pneu neige " et qu'il réussisse les tests de qualité.

3. Montrons que $P(Q) = 0.944$:

L'événement $Q = (Q \cap N) \cup (Q \cap C)$.

D'où: $P(Q) = P(Q \cap N) + P(Q \cap C)$
$= P(N \cap Q) + P_C(Q) \times P(C)$.

Ainsi: $P(Q) = 36.8\% + 96\% \times 60\%$

=> $P(Q) = 94.4\%$.

La probabilité demandée est de: 94.4%.

4. Déterminons la probabilité que ce pneu soit un pneu neige:

Cela revient à calculer: $P_Q (N)$.

Or: $P_Q (N) = \frac{P (Q \cap N)}{P (Q)}$.

Ainsi: $P_Q (N) = \frac{36.8\%}{94.4\%}$ => $P (Q) = 39\%$.

La probabilité demandée est de: 39%.

EXERCICE 2

[Centres Étrangers 2016]

Partie B: La durée de vie d'un pneu

1. Déterminons la probabilité qu'un pneu classique ait une durée de vie inférieure à 25 milliers de kilomètres:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X est la variable aléatoire qui correspond à la durée de vie d'un pneu classique (en milliers de kilomètres).
- X suit la loi normale d'espérance $\mu = 30$ et d'écart type $\sigma = 8$.
- T suit la loi normale centrée réduite.

Il s'agit de calculer: $P(X \leqslant 25)$.

$$P(X \leqslant 25) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{25-30}{8}\right)$$

$$= P(T \leqslant -0,625)$$

$$= 1 - P(T \leqslant 0,625).$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$P(X \leqslant 25) \approx 0,266.$$

Au total, la probabilité qu'un pneu classique ait une durée de vie inférieure à 25 milliers de kilomètres est de: 26,6%.

2. Déterminons la valeur de " d " telle que $P(X \geq d) = 20\%$:

$$P(X \geq d) = 20\% \iff P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \geq \frac{d - 30}{8}\right) = 20\%$$

$$\iff P\left(T \geq \frac{d - 30}{8}\right) = 20\%$$

$$\iff 1 - P\left(T \leq \frac{d - 30}{8}\right) = 20\%$$

$$\Rightarrow P\left(T \leq \frac{d - 30}{8}\right) = 80\%.$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$\frac{d - 30}{8} \approx 0,8416 \Rightarrow d \approx 36,733.$$

Au total, la valeur recherchée pour " d " est d'environ:

36, 733 kilomètres x 10^3.

Partie C: Une enquête de satisfaction

Déterminons en argumentant la décision du directeur:

Ici, nous avons:
- $n = 900$
- $p = 85\%$
- $f = \frac{735}{900} \Rightarrow f \approx 81,7\%.$

Dans ces conditions:

$n = 900 \geq 30$, $n \, . \, p = 765 \geq 5$ et $n \, . \, (1 - p) = 135 \geq 5$.

Les conditions sont donc réunies et on suppose que le taux de satisfaction reste le même que celui de l'année précédente.

On choisit un échantillon aléatoire de 900 personnes parmi les clients.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% s'écrit:

$$I = \left[p - 1,96 \times \left(\frac{p\,(1-p)}{n} \right)^{1/2} ; p + 1,96 \times \left(\frac{p\,(1-p)}{n} \right)^{1/2} \right],$$

cad: $$I = \left[0,85 - 1,96 \times \left(\frac{0,85 \times 0,15}{900} \right)^{1/2} ; 0,85 + 1,96 \times \left(\frac{0,85 \times 0,15}{900} \right)^{1/2} \right].$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $I \approx [\, 82,6\% \,;\, 87,4\% \,]$.

Or la fréquence de clients satisfaits " f ", sur l'échantillon, est telle que:

$$f \approx 81,7\ \% \notin I.$$

Ainsi, le directeur affirmera que le taux de satisfaction n'est pas maintenu.